Tillämpad matematik – en populär introduktion för lärare och ingenjörer

Johan Byström och Lars-Erik Persson

Introduktion

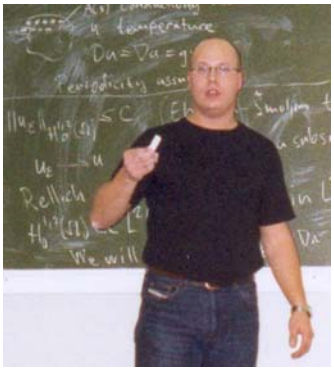
I detta föredrag skall vi berätta om en mycket populär grundkurs i tillämpad matematik för doktorander i andra ämnen (än matematik). Redan nu vill vi påpeka att åtminstone 250 doktorander vid Luleå tekniska universitet (från fler än 30 olika avdelningar) och drygt 40 doktorander vid Uppsala Universitet (från 16 olika avdelningar) hittills godkänts på kursen.

Vi skall även beskriva den senaste utvecklingen, nämligen den att kursen nu håller på att utvecklas som tolv webb-baserade kurspaket, varav fem finns tillgängliga från och med hösten 2003 för alla gymnasielärare i Sverige.

I ett appendix till vår artikel försöker vi sätta in vår artikel i ett sammanhang där vi tycker den hör hemma i den aktuella debatten. I anslutning till detta vill vi även presentera några närliggande idéer som ligger oss varmt om hjärtat.

Bakgrund till kursen

Lars-Erik Persson är professor i matematik vid Luleå tekniska universitet. Lars-Erik har under ett antal år givit en grundkurs i tillämpad matematik för doktorander i andra ämnen (än matematik). Målsättningen med kursen är att ge deltagarna en introduktion till ett antal moderna metoder inom tillämpad matematik av speciellt intresse för forskare inom ingenjörsämnen. Lars-Erik har under många år dessutom bedrivit en väldigt framgångsrik doktorandutbildning i matematik, där hittills 18 personer handletts till doktorsexamen (däribland Johan Byström).



Johan Byström är lektor i matematik vid Luleå tekniska universitet. Johan är också koordinator på en av LTU:s arenor, Arena lärande. I anslutning till detta

har Johan engagerat sig i olika former för lärande och distansutbildning. Johan är dessutom i grunden civilingenjör i datateknik och väldigt intresserad av datorer och webbutveckling. För övrigt är Johan väldigt engagerad i internationalisering i allmänhet och Barentssamarbete i synnerhet.

Tillsammans har vi slagit oss samman för att utveckla Lars-Eriks doktorandkurs i tillämpad matematik till en webbkurs. Anledningen till detta är att vi vill göra kursen tillgänglig även utanför universitetets gränser och intressera fler människor till att bedriva högre studier i matematik. Speciellt har vi tillsammans med Centrum för Tillämpad Matematik vid LTU, Skolverkets enhet för innehållsutveckling, Nationellt Centrum för Matematikutbildning samt Nätuniversitetet valt att erbjuda kursen till Sveriges gymnasielärare.

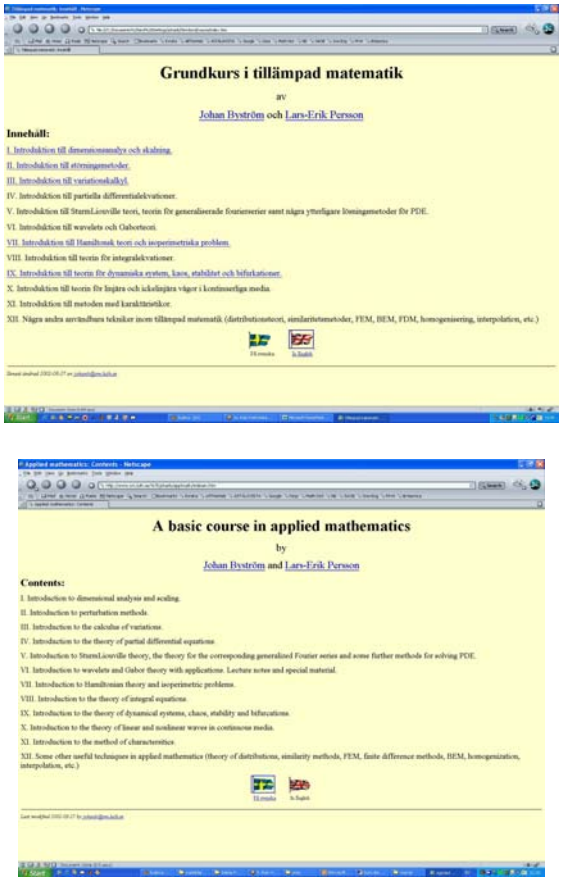
Huvudanledningen till att vi valt att koncentrera oss på gymnasielärare är att vi vill stimulera fler gymnasieelever att läsa naturvetenskap och teknik vid universitet och högskolor i Sverige. Kursen är tänkt att ge lärarna idéer och inblickar i moderna tillämpade områden inom matematiken. Vi tror och hoppas att dessa lärare bättre kommer att kunna motivera och entusiasmera sina elever till varför matematik är viktigt, användbart, intressant och roligt.

Kursens delmoment

Kursen innehåller följande tolv kurspaket, varav 1, 2, 3, 7, och 9 finns färdigutvecklade inför höstterminen 2003:

1. Introduktion till dimensionsanalys och skalning.
2. Introduktion till störningsmetoder.
3. Introduktion till variationskalkyl.
4. Introduktion till partiella differentialekvationer.
5. Introduktion till Sturm-Liouville teori, teorin för generaliserade fourierserier samt några ytterligare lösningsmetoder för PDE.
6. Introduktion till wavelets och Gaborteori.
7. Introduktion till Hamiltonsk teori och isoperimetriska problem.
8. Introduktion till teorin för integralekvationer.
9. Introduktion till teorin för dynamiska system, kaos, stabilitet och bifurkationer.
10. Introduktion till teorin för linjära och ickelinjära vågor i kontinuerliga media och metoden med karaktäristikor.
11. – 12. Några andra användbara tekniker inom tillämpad matematik (distributionsteori, similaritetsmetoder, FEM, BEM, FDM, homogenisering, interpolation, etc.)

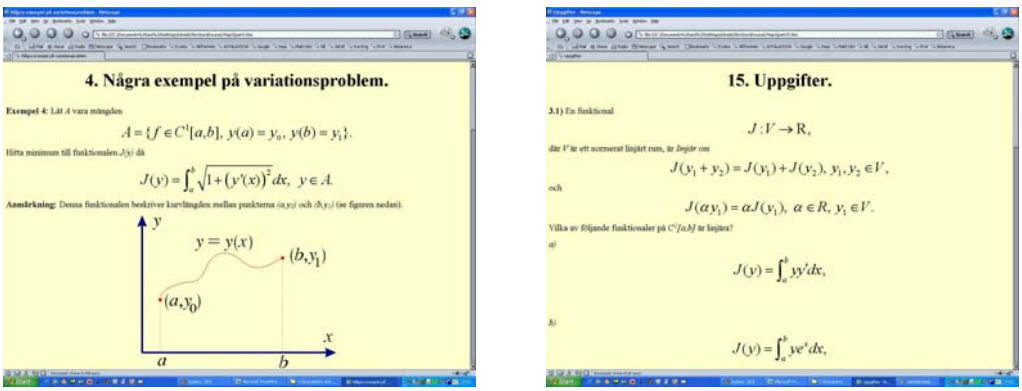
Dessa kurspaket kommer i framtiden även att översättas till engelska, se figur 1 nedan.



Figur 1. Kursens hemsida finns både på svenska och engelska.

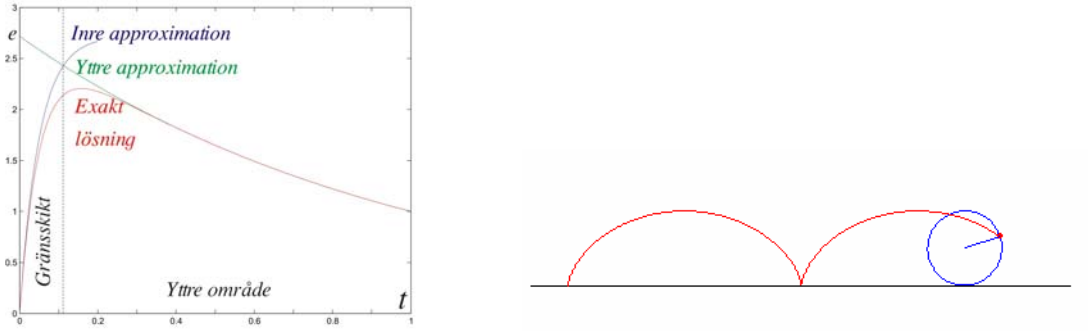
Kursens genomförande

Då kursen vänder sig till gymnasielärare spridda över hela landet ges kursen som en webbkurs. Varje kurspaket består av cirka 10-15 webbsidor med teori och avslutas med en sida med övningar. Se figur 2 för exempel på webbsidor.



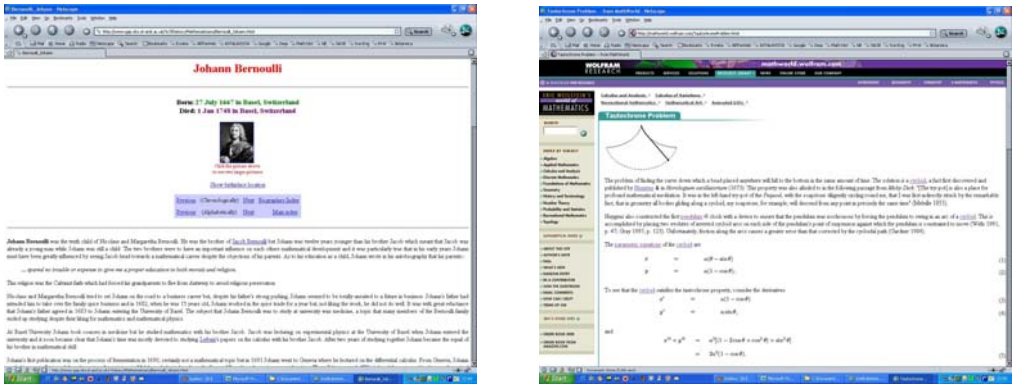
Figur 2. Två exempel på webbsidor.

Varje webbsida är en logisk del av ett kurspaket, innehållande teori, exempel, bilder och animeringar för att på ett så lättfattligt sätt som möjligt förklara de grundläggande begreppen. Viktiga begrepp illustreras med lämpliga bilder och animationer. Se figur 3.



Figur 3. Vissa detaljer förklaras med bilder, medan andra (som till exempel cykloiden) med fördel illustreras med animationer.

Externa länkar till MacTutor History of Mathematics Archive och Eric Weisstein's World of Mathematics finns för att djupare beskriva historiska eller matematiska begrepp eller personer. Se nedanstående figur.



Figur 4. Externa länkar till MacTutor och Weisstein's world of Mathematics.

Kursdeltagarna håller kontinuerlig kontakt med kursledarna per e-post, telefon eller WebCT. Vi är angelägna om att kursdeltagarna kan få den personliga kontakt som ibland krävs för att alla detaljer skall gå att förstå.

Examination sker normalt i slutet av varje kurspaket. Det kan även ske efter en samling paket har lästs. Examinationsformen väljs i samråd mellan kursdeltagare och handledare (beroende bland annat på geografiska faktorer). Normalt handlar det om skriftlig tentamen eller inlämningsuppgifter. Efter godkänt resultat på valfritt antal kurspaket erhåller kursdeltagaren ett skriftligt examensbevis på genomgången kurs.

Figur 5. Efter genomgången kurs får kursdeltagaren ett examensbevis.

En populär beskrivning av delmomenten

Nedan följer en populär beskrivning av de tolv kursmomenten i kursen.

1. Introduktion till dimensionsanalys och skalning.
För att kunna beräkna energin som utvecklades av den första atombomben 1945 gjorde matematikern G. I. Taylor en analys av vilka variabler det kunde tänkas bero på. Genom att sätta samman variablerna på ett sådant sätt att det bildade en dimensionslös storhet kunde man sedan enkelt beskriva den fysikaliska lag som beskriver energiutvecklingen. Fotografier tagna vid olika tidpunkter efter explosionen användes sedan för att verifiera lagens korrekthet.

En av de mest grundläggande teknikerna som är användbar i begynnelse- eller modelleringsfasen av ett problem är analys av de relevanta kvantiteterna och hur de måste hänga ihop ur ett dimensionsperspektiv. Enkelt tolkat, äpplen och päron är inte samma sak; ekvationer måste ha en konsistens bland ingående variabler som gör att man jämför termer med samma dimension. En annan viktig procedur är skalning. Det innebär grovt sett att man väljer nya (vanligtvis dimensionslösa) variabler och omformulerar problemet i dessa variabler. Detta är inte bara användbart utan ofta även en nödvändighet, i synnerhet när man jämför storleksordningar hos olika termer i en ekvation för att utesluta termer av liten storlek.

2. Introduktion till störningsmetoder.
En sten som faller under gravitation med försummande av luftmotstånd kommer till slut att få oändlig hastighet (om vi inte inkluderar relativistiska effekter). Det stämmer inte med verkligheten då luftmotståndet gör att vi kommer att nå en

gränshastighet till slut. Vi kan enkelt lösa det förstnämnda problemet. Men hur ska vi hantera ett problem då vi till det ursprungliga även lägger till en term (vi stör ursprungsproblemet) som till exempel beror ickelinjärt på hastigheten (som luftmotståndet)? Om vi antar att denna term är liten kan vi anta att lösningen kommer att vara snarlik den ursprungliga men ha en additiv term som beror på den lilla störningstermen. Denna additiva term hos lösningen kommer att kompensera så att vi istället når en gränshastighet.

När en matematisk modell formuleras för ett fysikaliskt problem så representeras den ofta med ekvationer som inte är analytiskt lösbara. I det läget måste man istället använda numeriska eller approximativa metoder. Störningsmetoder hör till de vanligaste approximationsmetoderna som används inom tillämpad matematik. Grovt sett kan störningsmetoder ge oss en approximativ lösning då problemet modelleras av ekvationer som har små termer. Dessa termer kommer från fysikaliska processer som har små men viktiga effekter, som till exempel friktion, luftmotstånd och viskositet.

3. Introduktion till variationskalkyl.

En partikel med massa m och begynnelsehastighet 0 glider utan friktion under gravitation från en punkt i vertikalplanet till en annan längs en ståltråd som beskrivs av en kurva $y = y(x)$. Hur skall kurvan se ut för att partikeln ska få minsta möjliga åktid? En såpfilm som spänns upp av böjd ståltråd antar en form som gör att dess area är minimal. Hur kommer såpytan att se ut?

Frågor som dessa kan besvaras med hjälp av variationskalkyl. Variationskalkylen föddes när några 1700-talets mest kända matematiker försökte lösa det första av de ovanstående problemen och har sedan dess utvecklats till en helt egen gren av matematiken, där huvudproblemet handlar om att optimera så kallade funktionaler.

4. Introduktion till partiella differentialekvationer.

En klotformad julskinka med massan 2 kg tas från rumstemperatur och sätts in i en ugn som är 100 grader varm. Hur lång tid tar det innan innertemperaturen är minst 75 grader överallt? Det problemet beskrivs av värmeledningsekvationen som är en av de grundläggande partiella differentialekvationerna.

De allra flesta fysikaliska problemen i verkligheten modelleras av partiella differentialekvationer. Det visar sig att man kan klassificera flera av dessa ekvationer i några olika grupper, där lösningarna till ekvationer inom en grupp har liknande beteende. Vi introducerar också några grundläggande lösningsmetoder (som till exempel variabelseparation) och egenskaper för linjära PDE.

5. Introduktion till Sturm-Liouville teori, teorin för generaliserade fourierserier samt några ytterligare lösningsmetoder för PDE.

Med tre koordinater kan vi beskriva vilken punkt som helst i rummet. Mer precist innebär det att vi kan beskriva varje punkt i rummet som en summa av (ortogonala) enhetsvektorer i *x*-, *y*- och *z*-riktningarna (de utgör en bas för rummet) multiplicerade med en förskjutning i vardera led. Det beror på att

rummet är tredimensionellt. En funktion kan vi betrakta som ett objekt som tillhör ett rum med oändlig dimension och för att beskriva varje funktion behöver vi således en oändlig ortogonal bas. Det visar sig att så kallade egenfunktioner utgör just en sådan bas.

Två klassiska tekniker för att hitta lösningar till randvärdesproblem grundar sig på att utveckling i egenfunktioner. Det är inte svårt att förstå att det är svårt att ge generella principer som kategoriserar egenvärden och egenfunktioner hos godtyckliga differentialoperatorer. Strategin är därför att analysera speciella klasser av differentialoperatorer. En sådan klass är så kallade Sturm-Liouvilleoperatorer. Den andra metoden vi beskriver här ansluter till variabelseparationsmetoden beskriven i förra kapitlet. Idén här är rätt enkel; vi antar att lösningen till den partiella differentialekvationen är en linjärkombination av egenfunktionerna till en associerad Sturm-Liouvilleoperator. Den metoden kallas för Fouriers metod.

6. Introduktion till wavelets och Gaborteori.

I USA har FBI ett gigantiskt register för sina (kriminella) medborgares fingeravtryck. Dessa fingeravtryck ligger lagrade som bilder i en databas. Detta medför två problem. För det första tar bilderna stor plats. För det andra, hur kan man jämföra två fingeravtryck för att avgöra om de är lika? Antag att man istället för bilder kunde spara en vektor med parametrar som i stort beskriver hur bilden är uppbyggd. För det första skulle man spara plats. Men viktigare är att man kan jämföra dessa vektorer och avgöra vilken som ligger närmast på ett enkelt sätt. Det absolut bästa verktyget för detta (som FBI använder) är wavelets.

Fouriers metod handlar i grunden om att dela upp en lösning i egenfunktioner. Generellt visar det sig att man kan beskriva vilken (tids)funktion som helst genom att dela upp den i oändligt många periodiska vågor med olika frekvenser. En av fördelarna med detta är att man kan analysera funktionens frekvensinnehåll. Problemet är dock att det finns en fysikalisk lag (Heisenbergs osäkerhetsrelation) som säger att ett objekt inte kan vara fullständigt lokaliserat i tidsplanet samtidigt som i frekvensplanet. En våg som har exakt bestämd frekvens kommer därför att ha oändlig utsträckning i tiden. Ett sätt att komma förbi detta problem är att dela upp funktionen i så kallade wavelets, ”vågkrusningar”, som är någotsånär lokaliserade både i tid och frekvens.

7. Introduktion till Hamiltonsk teori och isoperimetriska problem.

Enligt historiska berättelser så bad drottning Dido omkring år 850 f.k. den nordafrikanske hövdingen Jarbas om en bit land. Han lovade henne att få så mycket land som kunde rymmas inom en kohud. Drottning Dido skar huden i remsor och la ut den i en halvcirkel med den nordafrikanska medelhavskusten som diameter. På det sättet maximerade hon den inneslutna arean och bildade där sedan stadsstaten Karthago. Isoperimetriska problem är variationsproblem med bivillkor. I problemet ovan är arean som skall maximeras variationsproblemet medan kohuden är bivillkoret.

En av de viktigaste principerna inom mekaniken säger att rörelsen hos ett mekaniskt system är sådant att verkan (integralen av differensen mellan den

kinetiska och den potentiella energin) minimeras. Via variationskalkyl leder det till en andra ordningens differentialekvation, som går att skriva om som ett system (Hamiltons ekvationer) av första ordningens differentialekvationer i variablerna läge och rörelsemängd.

Ekvationen för en harmonisk oscillator (till exempel en svängande pendel) följer ur Newtons lag och är därför av andra ordningen. Men man kan också se det som ett system av två stycken första ordningens differentialekvationer i variablerna läge *y* och rörelsemängd *p*. Lösningen till dessa ekvationer är en familj av ellipser i *yp*-planet. Detta ger kvalitativ information om hur systemet beter sig.

8. *Introduktion till teorin för integralekvationer.*

En butiksägare upptäcker att en viss procenthalt *k(t)* av varorna är osålda tiden *t* efter att denne beställde hem dem. I vilken takt ska butiksägaren beställa hem varor för att hålla ett konstant lager? Detta är en typ av problem som leder till en integralekvation.

En integralekvation är en ekvation där den okända funktionen förkommer under ett integraltecken. Sådana ekvationer är fundamentala i tillämpad matematik och dyker ofta naturligt upp i modelleringen av ett fysikaliskt problem. De är också viktiga i omformuleringen av såväl begynnelse- som randvärdesproblem för ordinära och partiella differentialekvationer för att kunna studera frågor om existens av lösningar. Vi kommer att behandla två huvudtyper (Fredholm och Volterra) av linjära integralekvationer.

9. Introduktion till teorin för dynamiska system, kaos, stabilitet och bifurkationer.

En pendel som är upphängd över tre stycken attraherande magneter släpps från ett utgångsläge. Efter en viss tids pendling kommer den att stanna ovanför en av magneterna. Men skulle man bara rubba utgångsläget minimalt skulle det kunna leda till att pendeln istället stannar över en annan magnet. Trots att pendelns rörelser är helt kända via dess ekvationer så kan vi alltså inte förutspå hur en liten ändring av ingångsdata kommer att kunna påverka dess sluttillstånd. Den magnetiska pendeln är ett typexempel på ett kaotiskt system.

Betrakta ett system i naturen som existerar i ett tillstånd *T*. Vi säger att *T* är stabilt (i en eller annan mening) om små störningar eller ändringar i systemet inte drastiskt påverkat tillståndet *T*. Solsystemet existerar till exempel i ett tidsberoende tillstånd där planeterna roterar runt solen på ett ordnat sätt. Det är känt att om en liten himlakropp (till exempel en komet) tillförs systemet så kommer det ursprungliga systemet inte att ändras på något signifikant sätt. Vi säger att det ursprungliga tillståndet är stabilt mot små störningar. Ett relaterat begrepp är bifurkation. Det uppstår i system där tillståndet beror på någon parameter. När denna parametern ändras vid något kritiskt värde så kommer tillståndet att ändras till ett annat tillstånd, vanligtvis med en ändring av systemets stabilitet. Motsatsen till ett stabilt system är när en liten ändring hos systemet medför en radikal ändring hos tillståndet. Det brukar benämnas kaos. Vi kommer även att undersöka kopplingen till fraktaler såsom Julia- och

Mandelbrotmängder. Deltagarna får även se ett enkelt exempel på hur kaos kan illustreras med hjälp av en vanlig räknedosa.

10. Introduktion till teorin för linjära och ickelinjära vågor i kontinuerliga media och metoden med karaktäristikor.

När en havsvåg närmar sig stranden så blir den högre samtidigt som dess profil blir brantare. Vid ett kritiskt läge när vågkanten har en vertikal profil kommer vågen att bryta. Vad är det som gör att detta sker?

En av de fundamentala processerna i naturen är vågutbredning. Vi undersöker hur intressanta egenskaper som normalt dyker upp i naturen såsom dämpning, dispersion och chockvågor uppstår. En viktig metod för att lösa partiella differentialekvationer är metoden med karaktäristikor. För vågekvationer är korsande karaktäristikor till exempel intimt förknippat med chockvågor. Vi tittar också på modeller inom kontinuumsmekanik.

11.– 12. Några andra användbara tekniker inom tillämpad matematik (distributionsteori, similaritetsmetoder, FEM, BEM, FDM, homogenisering, interpolation, etc.)

Längst ut på en lyftkransarm är en stållina fäst och i den hänger en vägg till ett hus. Väggen väger 1200 kg och ger upphov till en kraft som appliceras i en enda punkt på lyftkransarmen. Hur kommer lyftkransarmen att bete sig?

Inom tillämpad matematik behöver man ibland kunna behandla pulser, punktmassor, dipolmoment med mera. För att kunna göra det behöver man utvidga funktionsbegreppet till så kallade generaliserade funktioner eller distributioner. Den matematik som beskriver hur man hanterar sådana objekt kallas för distributionsteori. I verkligheten kan man sällan lösa sina problem exakt eller med någon analytisk metod. Ibland tvingas man till numeriska metoder som finita elementmetoder (FEM), randelementmetoder (BEM) eller finita differensmetoder (FDM). I andra fall kan man tvingas till att göra någon typ av approximation. När problemet till exempel innehåller snabbt oscillerande koefficienter är numeriska metoder omöjliga att använda och då är homogenisering en bra metod att hitta en approximativ lösning. Problem som kräver denna typ av behandling uppkommer ofta när man undersöker egenskaperna hos media som innehåller inklusioner av ett annat material, till exempel fiberkompositer.

Kontaktinformation

Dr. Johan Byström
Institutionen för matematik
Luleå tekniska universitet
971 87 Luleå
Tel: 0920-49 18 85
Email: johanb@sm.luth.se
http://www.sm.luth.se/~johanb

Prof. Lars-Erik Persson
Institutionen för matematik
Luleå tekniska universitet
971 87 Luleå
Tel: 0920-0920-49 11 17
Email: larserik@sm.luth.se
http://www.sm.luth.se/~larserik

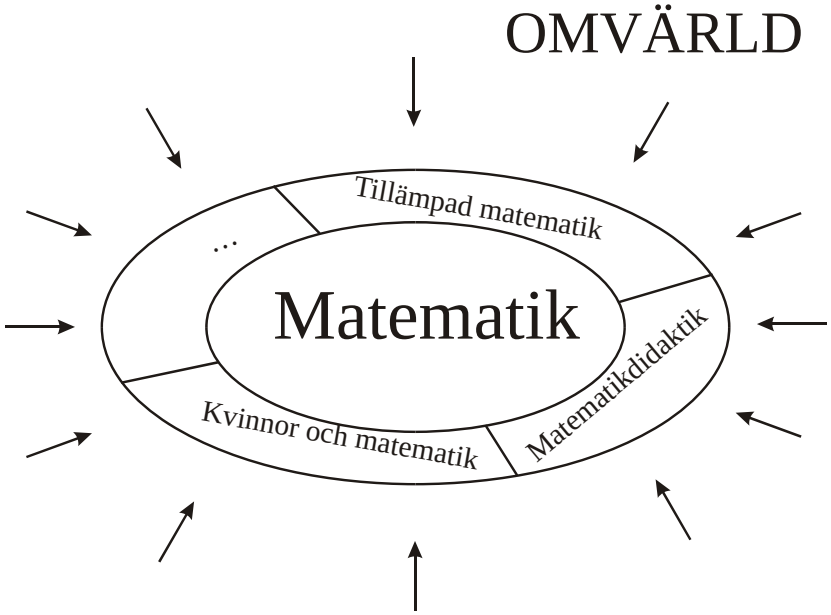
Appendix: Omvärldens intresse för matematik

I anslutning till det vi skrivit ovan vill vi påstå att omvärlden är mycket intresserad av att utnyttja och få ta del av det vår fantastiska matematik kan erbjuda. Ofta gäller dock detta områden som inte direkt förknippas med ”ren” matematik. Vi ger följande tre exempel:

1. Tillämpad matematik.
Vi har funnit att det finns ett fantastiskt stort intresse för den kurs som presenterats ovan och där vi försökt ta hänsyn till omvärldens behov och önskemål. Vidare vill vi betona att Teknikvetenskapliga Forskningsrådet (TFR) under relativt lång tid ansett detta område så viktigt att det utpekats som ett speciellt prioriterat område och att relativt stora resurser tilldelats som en följd av detta.

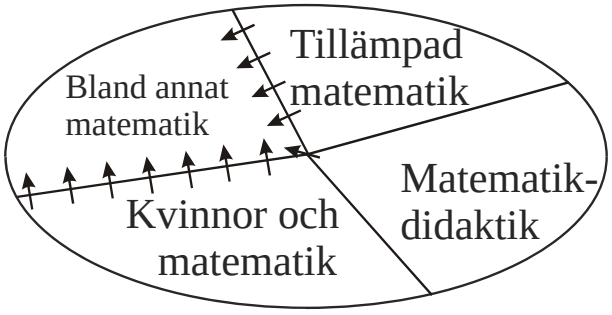
2. Matematikdidaktik.
Riksbankens Jubileumsfond (RJ) har satsat 45 miljoner SEK för att detta område skall utvecklas forskningsmässigt även i Sverige. Även Vetenskapsrådet (VR) stödjer ett antal forskningsprojekt i området. Den första professuren i ämnet har tillsatts, flera utländska gästprofessorer arbetar och ett 30-tal doktorandtjänster har tillsatts. Matematikdidaktik är ett ämne på mycket stark frammarsch just nu.

3. Kvinnor och matematik.
Det tog 107 år efter Sonya Kovalevskayas död tills Sverige fick sin nästa kvinnliga matematikprofessor. Omvärlden har genom ett antal åtgärder försökt ändra på detta. Till exempel har Naturvetenskapliga Forskningsrådet (NFR) och regeringen tilldelat stora medel för att kvinnliga professorer, doktorander och forskarassistenter skall anställas. Nuvarande Vetenskapsrådet (VR) har på ett mycket tydligt sätt markerat att kvinnliga sökande prioriteras. Vi har försökt illustrera dessa punkter i figur 6 nedan.



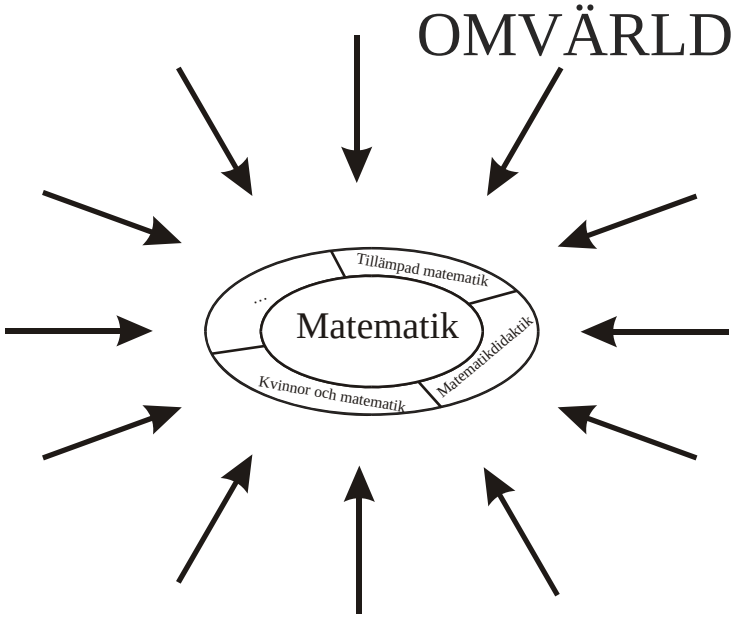
Figur 6. Omvärlden har önskemål och krav på vad vi kan erbjuda.

Författarna till denna artikel har inte någon enkel förklaring eller lösning till det som presenterats ovan och som tydligt påverkat debatten vid våra lärosäten. En tänkbar hypotes kan vara att man ser det hela som *en fix kaka* som skall delas och att om vi inom matematik ger efter för omvärldens önskemål så blir det en mindre del kvar för traditionell (ren) matematik. Vi har (på ett överdrivet sätt) illustrerat detta i figur 7.



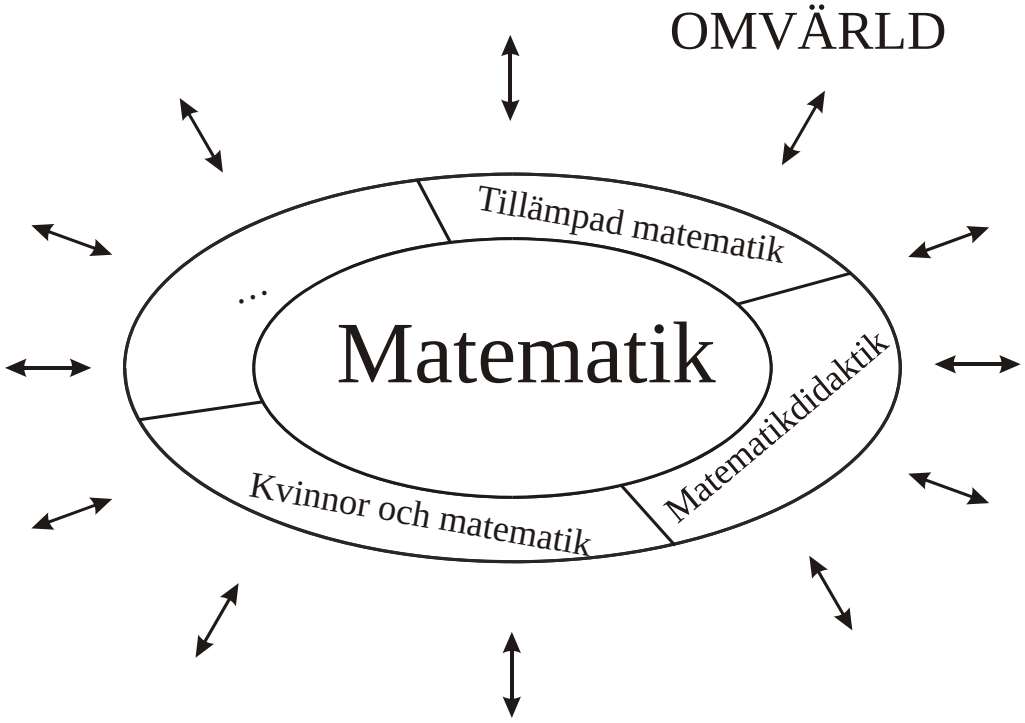
Figur 7. En hotbild är att ren matematik trängs undan av övriga ”discipliner i marginalen”.

Ett annat scenario om vi inte tar hänsyn till omvärldens önskemål kan vara att vi helt enkelt får en mindre total kaka att dela på och till följd av detta också ren matematik får en nedskärning. En av författarna till denna artikel hörde för några år sedan ett föredrag av professor Lennart Carleson som gjorde ett starkt intryck. Bland annat jämförde han med den tidigare uppfattningen om latin och dess uppgång och fall. Författarna till denna artikel är säkra på att något liknande inte kan hända med matematik men det kan ändå vara något viktigt att tänka på i debatter. Vi har (återigen på ett överdrivet sätt) illustrerat detta i nedanstående figur.

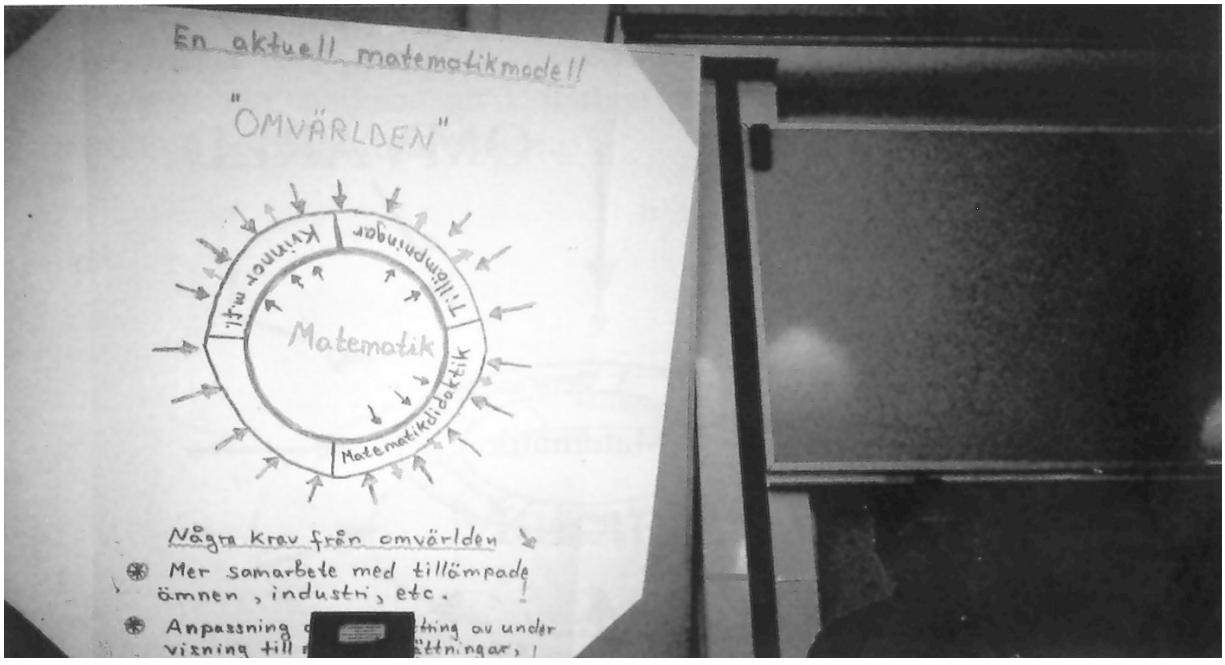


Figur 8. En annan hotbild är att hela kakan blir mindre om vi inte tar hänsyn till omvärldens önskemål.

Författarna till denna artikel tror helhjärtat på att vi genom att ta hänsyn till omvärlden både kan öka matematiks anseende samtidigt som utrymmet för vår kärnverksamhet (ren matematik) kan utökas. Det är ju just denna kärnverksamhet som gjort oss till så unika kunskapsbärare att vi efterfrågas i en förväntansfull omvärld. Vi har försökt illustrera detta i nedanstående figur.



Figur 9. Vår tro och förhoppning är att matematik och omgivande ämnen istället kan växa genom en utökad och konstruktiv växelverkan med omvärlden.



Professor Lars-Erik Persson visar hur han anser att matematiken ska växelverka med omvärlden.