# Kapitalverdimodellen

Kjell Arne Brekke

October 23, 2001

## 1 Frontporteføljer

En portefølje er en front-portefølje dersom den har minimal varians gitt avkastningen. Først, hva blir avkastning og varians på en portefølje? Vi tenker oss da at vi kan velge mellom $n$ risikable verdipapir. En investor plasserer en andel $w_i$ av formuen sin i aksje nummer $i$. Da vi antar at det bare finnes disse papirene må

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1.$$

Med vektornotasjon kan vi skrive dette som

$$\mathbf{w}^T = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$$

der $\mathbf{w}$ er en søylevektor. Ved å innføre en vektor $\mathbf{1}$ som bare består at ett-tall kan betingelsen at alle vektene skal summere seg til en, skrives som

$$\mathbf{w}^T\mathbf{1} = 1.$$

Avkastningen på denne porteføljen blir om ett år blir

$$\sum W_0(1+\tilde{r}_i)w_i = W_0(1+\sum \tilde{r}_i w_i)$$

og derfor blir forventet avkastning

$$Er = \sum E(r_i)w = \mathbf{r}^T\mathbf{w}.$$

Til slutt, hva blir kovariansen til denne porteføljen? Vi starter enklest med to dimensjoner

$$\begin{aligned} Var(\tilde{r}_1 w_1 + \tilde{r}_2 w_2) &= w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2cov(\tilde{r}_1 w_1, \tilde{r}_2 w_2) \\ &= w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2w_1 w_2 \sigma_{12} \\ &= \mathbf{w}^T \begin{matrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{matrix} \mathbf{w} \\ &= \mathbf{w}^T V \mathbf{w} \end{aligned}$$

der $V$ er kovariansmatrisa.

For å karakterisere frontporteføljene så vil vi minimere variansen gitt forventet avkastning. Det gir oss Lagrange-funksjonen

$$L = \frac{1}{2}\mathbf{w}^T V \mathbf{w} + \boldsymbol{\lambda}\left(Er - \mathbf{r}^T\mathbf{w}\right) + \gamma(1 - \mathbf{w}^T\mathbf{1})$$

der vi har ganget med en halv foran for å forenkle uttrykkene (minimere variansen er ekvivalent med å minimere halve variansen.) Dette gir førsteordensbetingelser

$$V\mathbf{w} - \boldsymbol{\lambda}\mathbf{r} - \boldsymbol{\gamma}\mathbf{1} = \mathbf{0}$$

Om vi her ganger med den inverse matrisa, så får vi

$$\mathbf{w} = \boldsymbol{\lambda}V^{-1}\mathbf{r} + \boldsymbol{\gamma}V^{-1}\mathbf{1}$$

Vi bruker så betingelsen at denne porteføljen skal gi en gitt avkastning. Da finner vi

$$\begin{aligned} Er &= \lambda B + \gamma A \\ 1 &= \lambda A + \gamma C \end{aligned}$$

der

$$\begin{aligned} A &= \mathbf{r}^T V^{-1} \mathbf{1} \\ B &= \mathbf{r}^T V^{-1} \mathbf{r} \\ C &= \mathbf{1}^T V^{-1} \mathbf{1} \end{aligned}$$

Vi kan nå løse ligningssystemet for $\gamma$ og $\lambda$. Vi vil se at begge to er lineære funksjoner av $Er$, f.eks om vi ganger første ligning med $A$ og nederste med $B$ finner vi

$$(B - A(Er)) = (BC - A^2)\gamma$$

og tilsvarende for $\lambda$. Når vi setter det inn i uttrykket for $\mathbf{w}$ finner vi at porteføljene er av formen

$$\mathbf{w} = \mathbf{g} + Er\mathbf{h}$$

altså et veid snitt av to porteføljer $\mathbf{g}$ og $\mathbf{h}$. Det betyr altså at alle porteføljer langs fronten kan genereres ved en kombinasjon av to ulike portefølje, der den relative vekten på hver enkelt av dem avhenger av hvilken avkastning vi vil ha.

Merk også at om vi kombinerer to front-porteføljer, så får vi en ny front-portefølje. Om vi ser på $Er_1 \neq Er_2$ så er porteføljen

$$\mathbf{w}_q = \alpha \mathbf{w}_1 + (1 - \alpha)\mathbf{w}_2$$

også en front-porteføljе. Dette følger av at

$$Er_q = \alpha Er_1 + (1-\alpha)Er_2$$

og

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_q &= \alpha\mathbf{w}_1 + (1-\alpha)\mathbf{w}_2 \\ &= \mathbf{g} + (\alpha Er_1 + (1-\alpha)Er_2)\,\mathbf{h} \\ &= \mathbf{g} + Er_q\mathbf{h}.\end{aligned}$$

Vi kan nå også utlede formen på effisiens-fronten. Om vi bruker da uttrykket for $\mathbf{w}$, sammen med uttrykkene for $\mathbf{g}$ og $\mathbf{h}$, følger da ved en manipulasjon som jeg ikke har tenkt å gjennomgå at

$$\sigma^2(\tilde{r}_q) = \frac{1}{D}\left(Cr_q^2 - 2Ar_q + B\right)$$

der jeg for å forenkle notasjonen skriver

$$r_q = E[\tilde{r}_q].$$

Vi ser da at vi får minimal varians for

$$\begin{aligned}r_q &= \frac{A}{C} \\ \sigma_q^2 &= \frac{1}{D}(\frac{A^2}{C} - 2\frac{A^2}{C} + B) \\ &= \frac{1}{C}\frac{(BC - A^2)}{D} = \frac{1}{C}\end{aligned}$$

ifølge definisjonen av $D$.

Vi kan nå tenge dette i avkastnings-standardavvik diagrammer, som figur 6.11 i Luenberger. Den får form som en hyperbel. De to siste leddene i uttrykket for $\sigma^2$ vil forsvinne for store (i absoluttverdi) verdier på $r_q$ og da ser vi at kurven nærmere seg to rette linjer som asymptoter, som indikert i figuren.

## 1.1 Om et risikofritt verdipapir finnes

Så lang har vi antatt at det finnes bare risikable aksjer (ellers er ikk $V$ veldefinert.) Med ett risikofritt objekt, trenger ikke vektene $w_i$ for risikable aksjer å summere seg til 1. Det som ikke brukes til aksjer bruker vi på det risikofrie papiret, så vi plasserer

$$W_0(1 - \sum w_1)$$

i det risikofrie verdipapiret.

Merk, noe som ikke ble fremhevet ovenfor, at vi ikke krever $0 \leq w_i \leq 1$. Dersom $\sum w_i > 1$, betyr det at vi plasserer en negativ andel av formuen i risikofrie papirer, det kan svarer til at vi låner penger til en gitt rente. Men hva menes med $w_i < 0$. Tenk først på hva det er å låne, f.eks at vi låner 100 kroner til 3% rente. Det svarer til å selge for 100 kroner i dag en forpliktelse til å levere 103 kroner om ett år. Tilsvarende kan en selge en forpliktelse til å levere en aksje om ett år. Det kalles futures salg. Når du selger aksjer for levering om ett år og selger for mer enn du alt eier, så svarer det til $w_i < 0$, og dette kalles shortsalg, og $w_i < 0$ kalles å "sitte short" i aksje $i$. Shortsalg er ikke lovlig, men vi skal likevel ressonnere som om det var lovlig, det gjør matematikken mye enklere.

For å finne fronten minimerer vi nå

$$\frac{1}{2}\mathbf{w}^T V \mathbf{w}$$

under bibetingelsen

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^T\mathbf{r} + (1 - \mathbf{w}^T\mathbf{1})r_f &= r_p \\ \mathbf{w}^T(\mathbf{r} - \mathbf{1}r_f) &= r_p - r_f \end{aligned}$$

Førsteordensbetingelsen blir da

$$\begin{aligned} V\mathbf{w}_p &= \lambda(\mathbf{r} - \mathbf{1}r_f) \\ \mathbf{w}_p &= \lambda V^{-1}(\mathbf{r} - \mathbf{1}r_f) \end{aligned}$$

Setter vi dette inn igjen ovenfor gir det

$$\begin{aligned} \lambda(\mathbf{r} - \mathbf{1}r_f)^T V^{-1}(\mathbf{r} - \mathbf{1}r_f) &= r_p - r_f \\ \lambda &= \frac{r_p - r_f}{(\mathbf{r} - \mathbf{1}r_f)^T V^{-1}(\mathbf{r} - \mathbf{1}r_f)} = \frac{r_p - r_f}{H} \end{aligned}$$

Variansen blir nå

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 &= \mathbf{w}^T V \mathbf{w} \\ &= \lambda^2(\mathbf{r} - \mathbf{1}r_f)^T V^{-1} V V^{-1}(\mathbf{r} - \mathbf{1}r_f) \\ &= \lambda^2 H = \frac{(r_p - r_f)^2}{H} \end{aligned}$$

Vi ser da at sammenhengen mellom avkastning og standardavvik blir en rett linje (med knekkpunkt i $r_p = r_f$.

Vi har tidligere sett at denne linjen framkommer som tangenten med fronten som skjærer $r$-aksen i $r_f$. Om vi plassere en andel $\alpha$ av formuen i en portefølje $\mathbf{e}$ på fronen og resten (kanskje negativ andel) i det risikofrie objektet så blir

$$\begin{aligned} r &= \alpha r_e + (1 - \alpha) r_f \\ \sigma &= |\alpha| \sigma_e \end{aligned}$$

Absolutttegnet absolutt-tegnet er der fordi variansen blir den samme med vekt $\alpha'$ og vekt $-\alpha'$. Tangeringen blir i puntet $\alpha = 1$, og det svarer til at vi ikke plasserer noe i det risikofrie papiret. Det punktet må da opplagt ligge på

fronten vi fant når vi ikke hadde noe risikofritt papir. Vi ser også at kurven vi får ved å variere $\alpha$ får en V-form med knekk i $\alpha = 0$. For $\alpha \neq 1$, så får vi lavere varians ved å bruke det risikofrie papiret, så den gamle fronen må ligge inni V-en. Merk endelig at de effesiente porteføljene er de som ligger i øverste arm av V-en.

Vi kan nå tenke oss tre tilfeller. $r_f < A/C$. Dette er normaltilfellet, og gir en situasjon som illustrert i figur 6.13 i Luenberger. Her er tangeringspunktet i den øverste armen på V-en. De effesiente porteføljene er derfor en kombinasjon av sparing/låning til gitt risikofri rente pluss en plassering i tangentporteføljen $\mathbf{e}$.

Dersom $r_f > A/C$ får vi et tilsvarende bilde, men nå er tangeringen i den nederste armen av V-en. Dette betyr at de effesiente porteføljene består av å sitte short i porteølgen og plassere pengene i risikofrie objekter. Endelig er $r_f = A/C$ en mulighet. Det kan da vises at $\sum w_i = 0$, slik at V-en ikke er en kombinasjon av en tangentporteføje og risikofri plasseringer, men en plasserer alt i det risikofrie objektet så har en en porteføje av aksjer, noen i short, men tilsammen av verdi 0.

Dersom alle investorer velger porteføljer på effektivitetsfronten, så vil de samlet sitte med 0kr i aksjer om $r_f = A/C$, de vil sitte short i en bestemt porteølge dersom $r_f > A/C$. Uansett, de totale midlene investert på børsene i dette tilfellet er enten 0 eller negativt. Det er helt klart ikke tilfelle, slik at vi må anta at

$$r_f < A/C$$

Hva blir covariansen mellom to porteføljer

$$\begin{aligned} Cov(\tilde{r}_p, \tilde{r}_q) &= \sigma_{pq} = \mathbf{w}_p^T V \mathbf{w}_q \\ &= \lambda_p \lambda_q (\mathbf{r} - \mathbf{1} r_f)^T V^{-1} V V^{-1} (\mathbf{r} - \mathbf{1} r_f) \\ &= \lambda_p \lambda_q H = \frac{(r_p - r_f)(r_q - r_f)}{H} \end{aligned}$$

Som sammen med

$$\sigma_q^2 = \frac{(r_q - r_f)^2}{H}$$

gir

$$\begin{aligned} (r_q - r_f)\sigma_{pq} &= (r_p - r_f)\sigma_q^2 \\ r_p &= r_f + \frac{\sigma_{pq}}{\sigma_q^2}(r_q - r_f) \\ &= r_f + \beta_{pq}(r_q - r_f) \end{aligned}$$

## 1.2 Likevekt

Hva er det som sikrer at ulikheten $r_f < A/C$ holder. Vel, la oss tenke oss at vi ser på et selskap der sannsynlighetsfordelingen for verdien om ett år er kjent. (Vi kommer tilbake til modeller med flere perioder senere.) Da er prisen på aksjen om ett år $\tilde{P}_i$. Dersom prisen i dag er $P_{i0}$ så blir avkastningen

$$(1 + r_i) = \frac{E\tilde{P}_i}{P_{i0}}.$$

Dersom alle ønsker å sitte short i aksjen, så er etterspørselen negativ. Men det vil presse prisen ned, slik at avkastningen går opp. Det gjør det mer attraktivt å plassere i verdipapir $i$, slik at etterspørselen etter aksjen vil da øke. Tilsvarende for en aksje som ikke inngår i fronten. Da ville etterspørsel falle dramatisk, og forventet avkastning øker igjen.

Vi skal vise at den eneste mulige likevekten i aksjemarkedet er at $r_f < A/C$. Med likevekt mener vi her at prisene på alle aksjene er slik at alle eksisterene aksjer ønskes av noen til gjeldene pris. Altså, når alle aktører i markedet kjøper alle de aksjene de ønsker, skal de tilsammen ha kjøpt alt som finnes. Hva skjer da om $r_f > A/C$? Vi vet da at V-en tangerer i nedre arm. En fornuftig investor vil imidlertid ønske høyest mulig avkastning gitt varians, noe som krever at han vil velge en porteføljе i øverste arm. Som vi har sett svarer dette til at han ønsker å sitte short i aksjer, altså ikke eie noen aksjer men helle ha en gjeld i aksjer. Det er da ingen investor som eier noen aksje, og det gir opplagt ikke noen likevekt. For tilfellet $r_f = A/C$, vet vi fra ovenfor at verdiene av alle aksjene i en frontporteføljе er lik 0. Dvs at en eier noen aksjer og sitter short i andre, til sammen slik at det gir total verdi av alle aksjer lik 0, og det kan heller ikke rime med at alle investorer til sammen eier alle aksjer.

Den eneste mulig likevekt er derfor at $r_f < A/C$. Da vil alle frontporteføljer bestå av en blanding av litt risikofrie papirer og en andel av formuen plassert i porteføljen $\mathbf{e}$. Om investor $i$ har en formue $W_i$ og plasserer en andel $\alpha_i$ av formuen så må

$$W_i \alpha_i = a_i \mathbf{e}^T \mathbf{p}$$

Summerer vi alle aktører aksjebeholdning finner vi da

$$\left( \sum a_i \right) \mathbf{e} = \left( \sum \frac{W_i \alpha_i}{\mathbf{e}^T \mathbf{p}} \right) \mathbf{e} = \mathbf{m}$$

der $\mathbf{m}$ er markedsporteføljen som består av alle aksjer i hele markedet. Dvs at i en likevekt må $\mathbf{e}$ være en andel av markedsporteføljen.

Dette betyr at $\mathbf{m}$ er en frontporteføljе. Om vi bruker $\mathbf{m}$ for $q$ i uttykket

til slutt i forrige seksjon så finner vi

$$\begin{aligned} r_p &= r_f + \frac{\sigma_{pm}}{\sigma_m^2}(r_m - r_f) \\ &= r_f + \beta_p(r_m - r_f) \end{aligned}$$

Som er kapitalverdimodellen CAPM (Capital Asset Pricing Model).

# 2 Utledning fra konsumsiden

Vi ser først på to-periode tilfellet. En investor med initialformue $W_0$ og en eksogen inntektsstrøm $y$ kan plassere formuen i $n+1$ ulike verdipapir. Den eksogene inntekten kommer først i siste periode (det som tjenes nå er en del av formuen). Investoren må da velge hvor mange enheter $x_j$ han vil kjøpe av hvert verdipapir $j$ i første periode.

$$\max_{x_1,\ldots x_n} \left[ u(W_0 - \sum_{j=0}^{n} x_j P_{j0}) + \rho E\left( u(\sum_{j=0}^{n} x_j P_{j1}) \right) \right]$$

Dette gir 1.ordensbetingelser:

$$u'(c_0)P_{j0} = \theta E\left(u'(\tilde{c}_1)P_{j1}\right)$$

der $c_0 = W_0 - \sum_{j=0}^{n} x_j P_{j0}$, og $\tilde{c}_1 = \sum_{j=0}^{n} x_j P_{j1}$. Vi bruker så sammenhengen

$$E\left(u'(\tilde{c}_1)P_{j1}\right) = E\left(u'(\tilde{c}_1)\right)E(P_{j1}) + cov(u'(\tilde{c}_1), P_{j1})$$

til å skrive dette om som,

$$\frac{u'(c_0)}{\theta E u'(\tilde{c}_1)} = \frac{E(P_{j1})}{P_{j0}} + \frac{cov(u'(\tilde{c}_1), P_{j1})}{E u'(\tilde{c}_1) P_{j0}}$$

La nå $\tilde{r}_j = \frac{P_{j1}}{P_{j0}} - 1$, $r_j = E\tilde{r}_j$og $1 + r^* = \frac{u'(c_0)}{\theta E u'(\tilde{c}_1)}$. Vi får da at

$$r_j - r^* = -\frac{cov(u'(\tilde{c}_1), \tilde{r}_j)}{E u'(\tilde{c}_1)}$$

Merk at dersom verdipapir 0 er risikofritt så er $r^* = r_0$. I fortsettelsen vil vi anta at dette er tilfellet.

Om alle prisene er normalfordelt, slik at også konsumet blir det, kan vi bruke et teorem fra Rubinstein (1976) som sier at

$$cov(u'(\tilde{c}_1), \tilde{r}_j) = E\left[u''(\tilde{c}_1)\right] cov(\tilde{c}_1, \tilde{r}_j)$$

Det gir

$$E(R_j) - R_0 = \left[-\frac{E\left[u''(\tilde{c}_1)\right]}{\theta E u'(\tilde{c}_1)}\right] cov(\tilde{c}_1, R_j)$$

for alle $j$.

La $r_M$ være avkastningen på markedsporteføIgen, da er

$$\left[-\frac{E\left[u''(\tilde{c}_1)\right]}{\theta E u'(\tilde{c}_1)}\right] = \frac{r_M - r_0}{cov(\tilde{c}_1, \tilde{r}_M)}$$

som gir

$$\begin{aligned} r_j &= r_0 + \frac{cov(\tilde{c}_1, \tilde{r}_j)}{cov(\tilde{c}_1, \tilde{r}_M)}\left[r_M - r_0\right] \\ &= r_0 + \beta_C\left[r_M - r_0\right] \end{aligned}$$

for alle $j$. Vi ser at vi her får en litt annen $\beta$ enn tidligere. For å se sammenhengen kan vi se på spesialtilfellet der markedsporteføIgen og konsumet er prefekt korrelert, slik at $\tilde{c}_1 = a\tilde{r}_M$ for en konstant $a$. I dette tilfellet blir de to $\beta-$verdiene de samme

$$\beta_C = \frac{cov(\tilde{c}_1, \tilde{r}_j)}{cov(\tilde{c}_1, \tilde{r}_M)} = \frac{a \cdot cov(\tilde{r}_M, \tilde{r}_j)}{a \cdot cov(\tilde{r}_M, \tilde{r}_M)} = \beta$$

Generelt er grunn til å tro at konsumet ikke er perfekt korrelert med $\tilde{r}_M$, og $\beta_C \neq \beta$. Forskjellen her er at i dette tilfellet ser vi på det totale konsumet til investoren, mens vi i modellen tidligere bare så på forventning

og varians for porteføljen han forvaltet. Som jeg tidligere har diskutert viser det seg at økonomien under visse forutsetninger oppfører seg om om den besto bare av en representativ agent, eller mange identiske slike agenter. I det tilfellet vil alle ha det samme konsumet, slik vi har definert konsumet her er det lik avkastningen på markedsporteføljen. Da er vi tilbake til den vanlige kapitalverdimodellen.