Binære modeller

Kjell Arne Brekke

September 3, 2001

1 Binære trær

Vi skal se på et aksjemarked med bare en aksje og en obligasjon. Obligasjonen har en sikker avkastning lik r, mens aksjen vokser med en faktor u eller avtar med en faktor d for hver periode. Vi antar at

$$d < (1 + r) < u$$

Om aksjekursen starter på s, så vil den etter t perioder ha nått en pris lik

$$S_t = s \cdot u^n d^{t-n}$$

der $0 \leq n \leq t$ er antallet perioder der kursen har gått opp.

Vi starter først med tilfellet der vi bare har 1 periode. Det er da to mulige tilstander i den periode, enten har vi sett opp u, eller vi har sett ned d. Tidligere har vi ressonnert som om vi kan handle i tilstandsbetingede utbetalinger, men her kan vi bare handle i aksje og obligasjoner. Vi skal likevel se at vi kan lage en portefølje som er ekvivalente med en tilstandsbetinget utbetaling.

Vi plasserer x kroner i obligasjoner og sitter med y aksjer. Det gir en utbetaling

$$x(1+r)+ysu \text{ om opp}$$
$$x(1+r)+ysd \text{ om ned}$$

Vi kan da velge x og y slik at vi får utbetalt en krone om kursen faller

$$\begin{aligned} x(1+r)+ysu &= 0 \\ x(1+r)+ysd &= 1 \end{aligned}$$

som gir

$$\begin{aligned} ys(d-u) &= 1 \\ y &= \frac{-1}{s(u-d)} \\ x &= \frac{u}{(u-d)(1+r)} \end{aligned}$$

Denne portreføljen vil koste

$$\begin{aligned} x+ys &= \frac{u}{(u-d)(1+r)}+\frac{-1}{(u-d)} \\ &= \frac{u-(1+r)}{(u-d)(1+r)} = \psi_d > 0 \end{aligned}$$

Vi ser altså at vi kan lage en portefølje som gir utbetaling lik en krone i neste periode dersom tilstanden er d. Og vi kan finne markedsprisen på denne porteføljen. Dette er helt ekvivalent med å handle i tilstandbetingede priser. Og vi vet at om det ikke skulle være mulig med arbitrasje, så må prisen på en tilstandbetinget utbetaling ved tilstand d være lik ψ_d slik vi fant den ovenfor.

Men hva så med $t = 2$. Kan vi lage en portefølje som gir oss en krone i periode $t = 2$ dersom tilstanden er ud og ellers ingenting? Med en tilstand her vil jeg mene mer enn bare hvor prisen ender opp, men hele prisbanen. I dette tilfellet skal vi altså ha en utbetaling dersom prisen først går opp og så ned, men ikke om den først går ned og så opp, selv om sluttprisen $sdu = sud$ er den samme i begge tilfeller. Tilstanden ud er altså forskjellig fra tilstanden du. Kan vi lage tilstandsbetingede utbetalinger for enhver bane, kan vi imidlertid gjøre det også for enhver sluttpris. Om du kjøper to tilstandsbetingede krav ett for tilstanden (banen) ud og ett for du, så får du en utbetaling på en krone helt sikkert om sluttprisen er $S_2 = sud = sdu$, men ellers ikke.

Kan vi så sette sammen en portefølje på tidspunkt $t = 0$ som gir oss en utbetaling på 1 krone på tidspunkt $t = 2$ om tilstanden er ud? Nei, det holder ikke bare å sette sammen en portefølje i periode 0, også sitte med hendene i fanget. Men om vi også tillater oss å justere porteføljen på tidspunkt $t = 1$ så vil det være mulig. Vi skal altså sette sammen en portefølje ved $t = 0$, og så foreta en selvfinansierende transaksjon på tidspunkt $t = 1$, slik at vi ender opp med 1 krone i periode $t = 2$ om tilstanden er ud, og ellers ingenting. For kort kaller vi kombinasjonen av en portefølje og selv-finansierende transaksjoner, for en selv-finansierende portefølje.

En transaksjon kalles selv-finansierende dersom vi ikke har noen utlegg eller inntekter. Om vi selger obligasjoner for x kroner og samtidig kjøper aksjer for x kroner, så er det en selv-finansierende transaksjon.

Hvordan skal vi finne den selv-finansierende porteføljen? Vel, vi vet at dersom prisen i første periode faller så blir slutt-tilstanden dd eller du, og det

er ikke aktuelt med noen utbetaling. Dersom prisen stiger i første periode, vil vi derimot ende opp i ud om prisen skulle falle i siste periode. Om vi befinner oss i $t = 1$ med tilstand u så vet vi fra regnestykket over at vi kan sette sammen en portefølje som gir oss 1 krone om prisen faller og ellers ingenting. En slik portefølje vil koste

$$\psi_d = \frac{u - (1 + r)}{(u - d)(1 + r)}.$$

Dersom vi ved $t = 0$ klare å sette sammen en portefølje som gir utbetaling på ψ_d om prisen øker og ellers ingenting, så kan vi bruke den utbetalingen til å kjøpe den nødvendige porteføljen på tidspunkt $t = 1$. Denne transaksjonen vil være selvfinansierende. Oppgaven er derfor redusert til å sette sammen en portefølje ved $t = 0$ som gir utbetaling ψ_d om prisen går opp og ellers ingenting. Men dette er bare ψ_d ganger porteføljen som gir utbetaling 1 om prisen øker og ellers ingenting. Og den finner vi akkurat som ovenfor

Exercise 1 *Vis at den selv-finansierende porteføljen som gir utbetaling* 1 *ved ud på tidspunkt* $t = 2$ *vil koste*

$$\frac{((1 + r) - d)(u - (1 + r))}{(u - d)^2(1 + r)^2}$$

Vi ser at vi i dette tilfellet, hvor prisen går enten opp med faktor u eller ned med faktor d så kan vi lage selvfinansierende porteføljer som er ekvivalente med en tilstandsbetinget utbetaling. Dere aner sikkert også hvordan vi kan gjøre det samme for ethvert tidspunkt t og enhver tilstand.

2 Utfallsrom og historie

Vi ser på en binomis modell med T perioder. Det er da 2^T forskjellige måter aksjekursen kan utvikle seg. Hver slik bane er nå et punkt i utfallsrommet for modellen. Vi lar ω, betegne en bane og mengden av alle mulige baner er Ω. Det typiske elementet er altså av formen $\omega = ddudu...uddu$.

Hver bane er i utgangspunktet mulig, om enn ikke alle er like sannsynlig. Sannsynigheten for at prisutviklingen skal bli bane ω er p_ω, der selvfølgelig

$$\sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1.$$

Banen helt fram til slutt-tidpunktet forteller oss alt som kommer til å skje. Når vi kjenner ω så vet vi aksjekursen på ethvert tidspunkt fram til $t = T$, så aksjekursen kan skrives som en funksjon av banen, $S_t(\omega)$. Vi kan da også regne ut forventet aksjekurs på ethvert tidspunkt

$$E[S_t] = \sum_{\omega \in \Omega} S_t(\omega) p_\omega$$

Selv om banen $ddudu...uddu$ i utgangspunktet er mulig og med en gitt sannsynlighet, så vil denne sannsynligheten forandre seg når vi kommer til periode $t = 1$, og vi ser at prisen først går ned. Siden banen også starter med ned, er den fortsatt mulig, og sannsynligheten har økt. (Vi kommer tilbake til konkrete eksempler snart). Men om vi så i andre periode observerer at kursen øker, så vet vi at bare baner som begynner med du vil kunne bli realisert. Den angitte banen er da ikke lenger et mulig utfall. Vi får altså mer informasjon ettersom tiden går, og det er det viktig å ta hensyn til. For dette formålet trenger vi å innføre begrepet "historie".

En historie på tidpunkt t er alt som har skjedd så langt, f.eks. for t=4 kan det være

$$h_t = uddu.$$

hvilken historie vi har på ethvert tidspunkt vil selvsagt også være bestemt om vi kjenner ω så vi kan skrive historien også som en funksjon av ω, altså $h_t(\omega)$. Nå er det selvsagt mange forskjellige baner som starter på samme måten, slik at vi kan ha $\omega \neq \omega'$, men slik at $h_t(\omega) = h_t(\omega')$ for $t < T$. Selvsagt må aksjekursen bare avhenge av hva som har skjedd så langt. Aksjekursen skal ikke avhenge av mer enn det vi vet, dvs

$$[h_t(\omega) = h_t(\omega')] \Leftrightarrow [S_t(\omega) = S_t(\omega')]$$

Litt uformelt skriver vi da

$$S_t(h_t).$$

3 Betinget forventning og martingaler

Det er lett å regne ut forventet verdi fra tidpunkt $t = 0$, men vi er også interessert i å f.eks. å kunne regne forventningsverdien gitt at vi på tidspunkt t har observert en bestemt historie h_t. Dette følger vanlige regler for betinget forventning, Ross avsnitt 1.2.

Først, hva er sannsynligheten for at kursen skal være på et bestemt nivå $\bar{s}$ på tidspunkt $\tau > t$, gitt at historien på tidspunkt t var $\bar{h}_t$? La $A = \{\omega \in \Omega : h_t(\omega) = \bar{h}_t\}$ og $B = \{\omega \in \Omega : S_\tau(\omega) = \bar{s}\}$, da er betinget sannsynlighet ved standard regler

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\sum_{\omega \in A \cap B} p_\omega}{\sum_{\omega \in A} p_\omega}$$

Disse sannsynligheten kan vi igjen bruke til å beregne en forventning. Jeg skriver da $\omega \in \bar{h}_t$, for $\omega \in A$, da så vi slipper å definere mengder som A i fortsettelsen.

$$E\left[S_\tau|\bar{h}_t\right] = \frac{\sum_{\omega\in\bar{h}_t} S_\tau(\omega)p_\omega}{\sum_{\omega\in\bar{h}_t} p_\omega}$$

Vi er nå klare til å definere et sentralt begrep

Definition 2 *En stokastisk S_t prosess kalles en martingal dersom for alle $\tau > t$ og for alle historier h_t så gjelder*

$$E\left[S_\tau|h_t\right] = S_t(h_t)$$

4 Et konkret eksempel

La oss gå tilbake til en binomisk modell. For det første er ikke modellen begrenset til at

$$S_t = su^n d^{t-n}$$

en alternativ modell kan være

$$S_t = s + nu - (t-n)d$$

der prisen altså får et additivt tillegg lik u for hver gang prisen går opp og eit fratrekk $-d$ hver gang prisen faller.

Exercise 3 *Sett $s = 80$, og $d = u = 10$, og $T = 2$. Mulig prisutvikling som et tre a.la Figure 7.1 i Ross.*

I tilfellet frå oppgaven er det 4 mulige baner: $\Omega = \{$dd,du,ud,uu$\}$. La sannsynlighetene være, i samme rekkefølge, 10%, 20%, 30% og 40%. La oss

beregne forventet kurs for $t = 2$ gitt at kursen fallt i første periode. Da er $h_1 = d$. Bare banene dd og du vil gi en slik h_1, og disse to banene har sannsynlighet hhv 10% og 20%. Vi ser videre at $S_2(dd) = 60$, mens $S_2(du) = 80$. Endelig er $S_1(h_1) = 70$.

Er denne prosessen en martingal? Vi kan da prøve å regne ut

$$E\left[S_2|h_1 = d\right] = \frac{S_2(dd)p_{dd} + S_2(du)p_{du}}{p_{dd} + p_{du}} = \frac{60 \cdot 10\% + 80 \cdot 20\%}{30\%} = 73.3333... \neq S_1(h_1) = 70$$

Vi ser altså at prosessen ikke er en martingal. Om vi derimot endrer sannsynlighetene til 15%,15%,30%,40%, så blir

$$E\left[S_2|h_1 = d\right] = \frac{60 \cdot 15\% + 80 \cdot 15\%}{30\%} = 70 = S_1(h_1)$$

men prosessen er likevel ikke en martingal. En tilsvarend likehet skal gjelde for alle historier og

$$E\left[S_2|h_1 = u\right] == 71\frac{1}{7} \neq S_1(h_1).$$

Men vi kan få denne likheten også oppfylt om vi justerer disse sannsynlighetene også til 35% og 35%. Men det er fortsatt ikke en martingal da

$$E\left[S_1\right] = \frac{70 \cdot 30\% + 90 \cdot 70\%}{100\%} = 84 \neq s$$

(Hva er historien på tidspunkt 0, h_0? Vel, ingenting har skjedd så den er tom. Vi forstår derfor $E\left[S_t|h_0\right]$ simpelthen som $E[S_t]$, utbetinget. For alle baner ω gjelder $\omega \in h_0$.) For at dette skal bli en martingal, må alle sannsynlighetene være like, altså $p_\omega = 25\%$ for alle ω.

Exercise 4 *Vis at dersom $d = 6$ og $u = 9$, og dersom sannsynlighetene er $p_{dd} = 36\%$, $p_{du} = p_{ud} = 24\%$ og $p_{uu} = 16\%$, så er prosessen også en martingal.*

Vi så ovenfor at om prosessen i utgangspunktet ikke er en martingal, så kan det tenkes at den blir det dersom vi forandrer sannsynlighetsmålene. Før vi går videre med flere begreper nå, skal vi se litt på hvorfor dette er så viktig for finansteorien. Vi skal se at vi er interessert i noen spesielle sannsynligheter som gjør at en bestemt prosess vi kan avlede fra aksjekursen, nettopp blir en martingal.

5 Tilstandspriser

Vi har nå sett at vi kan lage en portefølje som gir en utbetaling lik 1 krone ved tilstand h_t på tidspunkt t. Vi ønsker nå å verdsette en opsjon som utløper på et bestemt framtidig tidspunkt. Vi er da ikke så interessert i å modellere aksjekursene etter dette tidspunktet, så vi setter T lik innløsningstidspunktet. Hva er verdien av denne opsjonen?

For hver mulig tilstand ω på slutttidspunktet kan vi lage en portefølje som gir utbetaling om denne tilstanden inntreffer. Prisen på denne porteføljen er kaller vi ψ_ω. La kursen på aksjen vi har kjøpsopsjon på være $S(\omega)$ og innløsningsprisen lik K, da er verdien på opsjonen på tidspunkt T gitt som

$$C(\omega) = \max(0, S(\omega) - K) \text{ for alle } \omega \in \Omega.$$

Om vi nå for alle $\omega \in \Omega$ kjøper $C(\omega)$ enhenter av papiret som gir utbetaling 1 om tilstanden blir ω, så vil vi få nøyaktig samme utbetaling som om vi eide opsjonen. Ved arbitrasje må denne porteføljen ha samme verdi som opsjonen. Det følger at

$$c = \sum_{\omega \in \Omega} \psi_\omega \max(0, S(\omega) - K)$$

Så om vi kan finne prisene ψ_ω så er det lett å finne prisen på opsjonen. Vi skal komme litt tilbake til hvordan vi gjør dette i praksis. La oss først repetere en observasjon. Om vi kjøper en tilstandsbetinget utbetaling for alle mulige tilstander, vil vi få en utbetaling på 1 kr uansett hva som skjer, dvs en sikker utbetaling. Om obligasjonen betaler en perioderente på r så må nåverdien av 1 kr sikkert om T perioder være lik $1/(1+r)^T$. For at det ikke skal være mulig med arbitrasje må dette være lik verdien av alle de tilstandsbetingede papirene.

$$\sum \psi_\omega = \frac{1}{(1+r)^T}$$

eller om vi definerer $q(\omega)$ som

$$q_\omega = \psi_\omega (1+r)^T$$

så ser vi at

$$\sum q_\omega = 1$$

og siden prisene er ikkenegative blir også alle q_ω ikkenegative. Vi kan derfor se på q som en slags nytt sett av sannsynligheter. Vi ser da at

$$c = \frac{\sum_{\omega\in\Omega} q_\omega \max(0, S(\omega) - K)}{(1+r)^T} = \frac{E_Q\left[\max(0, S(\omega) - K)\right]}{(1+r)^T}$$

der fotkriften Q på forventingen indikerer at vi regner med "sannsynlighetene" q_ω.

Ved å kjøpe, for alle $\omega \in \Omega$, $S(\omega)$ enheter av verdipapiret som gir utbetaling ved ω, så får vi en portefølje som gir samme utbetaling som aksjen. Ved samme argument som ovenfor finner vi da at

$$s = \frac{E_Q\left[S(\omega)\right]}{(1+r)^T}.$$

La oss så lage en ny prosess

$$Z_t(\omega) = \frac{S_t(\omega)}{(1+r)^t}.$$

Vi ser da at $Z_0 = s$, og ved formelen ovenfor

$$Z_0 = E\left[Z_T\right].$$

Dette antyder at denne prosessen kan være en martingal, og som vi skal se er det faktisk tilfelle. For å vise det trenger vi litt mer verktøy

6 Det binomiske representasjons teorem

Vi ser altså på binomiske prosesser. Prosessene er tilpasset tilgjengelig informasjon. Det betyr at de stokastiske prosessene på tidspunkt t bare avhenger av h_t. Vi trenger også en annen type prosesser, det er de som er predikerbare prosesser. En prosess θ_t er predikerbar dersom θ_{t+1} bare avhenger av h_t, altså av historien fram til forrige periode. Hva betyr dette? La meg ta et eksempel.

Når vi nå har flere perioder kan det tenkes at renten varierer over tid, ja også med tilstander. Renten er imidlertid bestemt av prisen på obligasjoner. Så om du kjøper en obligasjon nå (på tidspunkt t og ved historie h_t) som gir utbetaling på 1 krone om en periode og som koster $\frac{1}{1+r(h_t)}$ så blir renta fra periode t til $t+1$ lik $r(h_t)$. Anta at vi setter $B_0 = 1$ kroner på tidspunkt $t = 0$, på en bankkonto som gir renter lik obligasjonsrentene. Da vil beløpet på bankkontoen på tidspunkt t kunne skrives som en funksjon av h_{t-1}. Det er opplagt riktig for B_1 og kan vises ved induksjon videre:

$$B_{t+1}(h_t) = B_t(h_{t-1})(1 + r(h_t)).$$

Beløpet på bankkontoen er altså en forutsigbar prosess. Som vi ser er høyresiden her bare avhengig av størrelser som er kjent på tidspunkt t, slik at verdien av prosessen på tidspunkt $t+1$ er kjent på tidspunkt t.

Et annet eksempel på en predikerbar prosess er antallet aksjer θ_t vi holder fra tidspunkt $t-1$ til t. Dette antallet må fastsettes på tidspunkt $t-1$ på bakgrunn av den informasjonen som er tilgjengelig da. Derfor er θ_t en predikerbar prosess.

Vi er nå klare til å presentere teoremet.

Theorem 5 (Martingalrepresentasjon, det binære tilfellet) *La så S være en binomisk prosess slik at S er en martingal under $\mathbb{Q}$. Dersom prosessen N også er en martingal under $\mathbb{Q}$, så finnes det en predikerbar prosess θ_t slik at*

$$N_t(\omega) = N_0 + \sum_{s=1}^{t} \theta_s(\omega)\Delta Z_t(\omega).$$

der $\Delta S_t(\omega) = S_t(\omega) - S_{t-1}(\omega)$.

Proof. *Først, merk at*

$$N_t(\omega) = N_0 + \sum_{s=1}^{t} \Delta N_t(\omega)$$

der $\Delta N_t(\omega) = N_t(\omega) - N_{t-1}(\omega)$. Merk først at ΔS_t kan anta to verdier avhengig av om prosessen går opp eller ned, la oss kalle dem ΔS^1 og ΔS^2. Det samme gjelder for ΔN_t. For at prosessen skal være en martingal må $q\Delta S_t^1 + (1-q)\Delta S_t^2 = q\Delta N_t^1 + (1-q)\Delta N_t^2 = 0$, og det gir

$$\begin{aligned} q\Delta S_t^1 &= (1-q)\Delta S_t^2 \\ q\Delta N_t^1 &= (1-q)\Delta N_t^2 \end{aligned}$$

som gir oss at

$$\frac{\Delta N_t^1}{\Delta S_t^1} = \frac{\Delta N_t^2}{\Delta S_t^2} = \theta_t.$$

Det gjenstår da bare å vise at θ_t er predikerbar. Merk da at om endringen i N er ΔN_t^1 og ΔN_t^2 avhenger av om vi går opp eller ned fra N_{t-1}, men uansett enten vi går opp eller ned, så er θ_t den samme. Altså kjenner vi verdien av θ_t alt på tidspunkt $t-1$. ■

7 Arbitrasje og ekvivalente martingalmål

Vi skal nå bruke teoremet overnfor til å vise vårt hovedresultat. Vi starter med å definere prosessen B_t som er det som vil stå på en bankkonto med renter lik obligasjonsrentene, slik vi diskuterte ovenfor. Mer at dette ikke forutsetter at rentene fra periode t til $t+1$ er kjent før vi kommer til periode t. Renteutviklingen kan altså være stokastisk, men siden vi handler med obligasjoner, så vet vi jo hva vi sitter igjen med om en periode.

Dersom renten er konstant den samme i alle perioder blir selvsagt $B_t = (1+r)^t$, og som vi husker ovenfor var det $S_t/(1+r)^t$ vi trodde skulle være en martingal. Vi definerer derfor dette som en engen prosess, $Z_t = \frac{S_t}{B_t}$.

Vi husker at de opprinnelige sannsynlighetene var p_ω, en for hver $\omega \in \Omega$. Dette sette av sannsynligheter vil vi referere til som $\mathbb{P}$. Som ovenfor skal vi bytte ut disse sannsynlighetene med nye sannsynligheter, $\mathbb{Q}$ slik at prosessen Z_t blir en martingal. Sannsynlighetsfordelingen kalles også sannsynlighetsmål, og $\mathbb{Q}$ kalles derfor ofte for et ekvivalent martingalmål.

Ekvivalent betyr i denne sammenheng at de samme utfallene får positiv sannsynlighet:

Definition 6 *Sannsynlighetsfordelingene $\mathbb{P}$ og $\mathbb{Q}$, kalles ekvivalente dersom*

$$[p_\omega > 0] \Longleftrightarrow [q_\omega > 0]$$

Theorem 7 *La $X_T(\omega)$ være et betinget krav på tidspunkt T, og la $\mathbb{Q}$ være det ekvivalente martingalmålet som gjør Z_t til en martingal. Da finnes det ingen muligheter for arbitrasje dersom og bare dersom kravet på tidspunkt t er verdsatt til*

$$X_t = B_t E_{\mathbb{Q}} \left[\frac{X_T}{B_T} | h_t \right].$$

Proof. Vi skal først vise at vi kan foreta arbitrasje dersom prisen settes til noe annet. Dette skal vi gjøre ved å sette sammen en portefølje slik at den gir eksakt samme pris som X_T på tidspunt T og har verdi X_t

Merk at om $N_t = X_t B_t^{-1}$, så er for $s > t$,

$$E_{\mathbb{Q}}\left[N_s|h_t\right] = E_{\mathbb{Q}}\left[E_{\mathbb{Q}}\left[N_T|h_s\right]|h_t\right] = E_{\mathbb{Q}}\left[N_T|h_t\right] = N_t$$

så N_t er en martingal. Ved martingal representasjonsteoremet finnes det da en predikerbar prosess slik at

$$N_t(\omega) = N_0 + \sum_{s=1}^{t} \theta_s(\omega) \Delta Z_t(\omega).$$

Vi setter nå sammen er portefølje som følger

$$\begin{array}{rcl} & & \theta_{t+1} - \text{aksjer} \\ \alpha_{t+1} & = & N_t - \dfrac{\theta_{t+1} S_t}{B_t} - \text{enheter obligasjoner} \end{array}$$

Denne porteføljen er verd

$$\pi_t = \alpha_{t+1} B_t + \theta_{t+1} S_t = \left[N_t B_t - \theta_{t+1} S_t\right] + \theta_{t+1} S_t = X_t.$$

Vi skal så vise at vi ikke trenger å spytte i noe ekstra penger for å vedlikeholde en slik porteføljе. La oss se hva som skjer fra t til $t+1$. Verdien av porteføljen har da forandret seg til

$$\begin{aligned}
\alpha_{t+1}B_{t+1} + \theta_{t+1}S_{t+1} &= \left[N_t - \frac{\theta_{t+1}S_t}{B_t}\right] B_{t+1} + \theta_{t+1}S_{t+1} \\
&= \left[N_t + \theta_{t+1}\left(\frac{S_{t+1}}{B_{t+1}} - \frac{S_t}{B_t}\right)\right] B_{t+1} \\
&= \left[N_t + \theta_{t+1}\Delta Z_{t+1}\right] B_{t+1} \\
&= N_{t+1}B_{t+1} = X_{t+1} \\
&= \alpha_{t+2}B_{t+1} + \theta_{t+2}S_{t+1}
\end{aligned}$$

så når vi selger den gamle porteføljen $(\alpha_{t+1}, \theta_{t+1})$ og kjøper den nye $(\alpha_{t+2}, \theta_{t+2})$ så går det akkurat opp, det blir ingenting til overs og det blir ikke noe ekstra utgifter. Når vi følger denne strategien helt ut, så kommer vi til slutt til at porteføljen til slutt er verd X_T. For å utelukke arbitrasje må dette også være verdien på kravet. ■

Tilsvarende kan vi selvsagt vise at verdien av et krav som utbetales på et vilkårlig tidspunkt $t < T$, blir

$$X_s = B_s E_{\mathbb{Q}}\left[\frac{X_t}{B_t}|h_s\right]$$

Og summen et krav som utbetaler litt på tidspunkt t og litt på tidspunkt T vil vi kunne dele opp i to verdipapir og verdien må være lik summen av dem. Et krav som gir ulike utbetalinger på ulike tidspunkt og tilstander vil ha verdi

$$V_s = B_s \sum_{t \geq s} E_{\mathbb{Q}}\left[\frac{X_t}{B_t}|h_s\right].$$