OPPGAVER I GEOMETRI

REDIGERT AV KRISTIAN RANESTAD

Oppgaver merket med * er vanskeligere enn de andre.

OPPGAVE 1

a) Bevis at en firkant har en omskrevet sirkel hvis og bare hvis motstående vinkler er supplementære (dvs har sum lik 180°). b) Forsøk å finne et kriterium for når en firkant har en innskrevet sirkel.

OPPGAVE 2

Hvor langt kan man se ut over havet fra et fyrtårn som er 25 m høyt? Jordradien er 6400 km.

OPPGAVE 3

La S være sentrum i en sirkel, og la A og B være to punkter på sirkelen som ikke ligger på samme diameter. Tangentene til sirkelen i A og i B skjærer hverandre i P. a) Forklar at det fins en sirkel som går gjennom de fire punktene A, B, S, P. b) Forklar hvordan man kan konstruere tangentene til en sirkel fra et punkt utenfor sirkelen.

OPPGAVE 4

AB er diameter i en sirkel. Punktene C og D ligger på sirkelen, på hver sin side av AB og slik at buen AC er 120° og buen BD er 90°. Trekk AC og BD til skjæring i P, og trekk AD og BC til skjæring i Q. a) Vis at $\angle P = \angle Q$. b) Generaliser denne oppgaven.

OPPGAVE 5

En fotballoppgave: a) Flo står på hjørnet av straffeområdet ("16-meteren"). Hvor på banen kan Solskjær stå og se målet under samme vinkel som Flo? b) På hvilke steder på banen ses de to målene under samme vinkel? c) Linjedommeren beveger seg langs sidelinja. Hvor ser han det norske målet under størst vinkel?

OPPGAVE 6

I trekanten $\triangle ABC$ er $\angle A = 75°$ og $\angle B = 60°$. Tangentene til trekantens omskrevne sirkel i A og i B skjærer hverandre i D. a) Vis at $\triangle ABD$ er rettvinklet og likebeint.

Date: November 2005.

Høyden fra D i $\triangle ABD$ forlenges til skjæring med sirkelen i punktet E. (E ligger utenfor $\triangle ABD$.) b) Bestem gradtallet til buen CE.

OPPGAVE 7

I et rektangel $ABCD$ (med $AB > BC$) fjerner vi et kvadrat $AEFD$, der E ligger på AB og F på CD. Dersom det gjenværende rektangelet $BCFE$ er formlikt med det opprinnelige rektangelet $ABCD$, sier vi at forholdet AB/BC er det gylne forhold.
a) Vis at det gylne forhold har verdien $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$.
Et kvadrat er innskrevet i en halvsirkel slik at to hjørner ligger på diameteren og to hjørner på sirkelen. La a være siden i kvadratet, og la b være den ene av de to bitene av diameteren som ligger mellom kvadratet og sirkelen.
b) Vis at a/b er det gylne forhold.
En likesidet trekant er innskrevet i en sirkel. En sekant i sirkelen deler to av trekantsidene på midten. La t være den delen av sekanten som ligger inne i trekanten, og la s være den ene av de to delene av sekanten som ligger mellom trekanten og sirkelen.
c) Vis at t/s er det gylne forhold.

OPPGAVE 8

En sekant skjærer av en bue ST på $90°$ av en sirkel. På forlengelsen av sekanten ligger et punkt P slik at tangenten til sirkelen fra P danner $40°$ med sekanten. (Sirkelens sentrum ligger inne i denne vinkelen.) Kall tangeringspunktet A.
a) Bestem gradtallet til buen TA. La M være midtpunktet på buen ST. Trekk korden AM. Den skjærer sekanten i B.
b) Vis at $\triangle APB$ er likebeint.
c) Vis at trekantene $\triangle ATM$ og $\triangle ABS$ er formlike.

OPPGAVE 9

To sirkler med sentrene S og T berører hverandre utvendig i R. En rett vinkel med toppunkt i R har vinkelbein som skjærer de to sirklene i henholdsvis P og Q. Vis at SP er parallell med TQ.

OPPGAVE 10

Vis at halveringslinja for en vinkel i en trekant og midtnormalen på den motstående trekantsiden skjærer hverandre på trekantens omskrevne sirkel.

OPPGAVE 11

Diameteren i en trekants omskrevne sirkel er lik produktet av to av trekantens sider delt på høyden på den tredje siden. Vis dette.

OPPGAVE 12

Bevis Ptolemaios' teorem: Dersom firkanten $ABCD$ kan omskrives av en sirkel, så er produktet av diagonalene lik summen av produktene av motsatte sider, dvs

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$$

(Hint: La E ligge på BD slik at $\angle BAE = \angle CAD$. Sammenlign trekantene $\triangle ABE$ og $\triangle ACD$, og trekantene $\triangle AED$ og $\triangle ABC$.)

OPPGAVE 13

Fire sirkler ligger i en "ring" og berører hverandre utvendig: S_1 berører S_2, som berører S_3, som berører S_4, som berører S_1. Vis at de fire berøringspunktene ligger på en sirkel.

OPPGAVE 14

Vis at de tre punktene med koordinater $A = [1, 0, 2], B = [0, 3, 5]$ og $C = [2, -3, -1]$ ligger på linje i det projektive planet, og finn homogene koordinater til et punkt D på denne linja slik at dobbeltforholdet $(AB, CD) = -2$.

OPPGAVE 15

Hvis punktene A, B, D, E, N, M ligger slik at de tre linjene AE, DM, NB er konkurrente, og de tre linjene AM, DB, NE er konkurrente, hva kan vi da si om de tre linjene AB, DE, NM?

OPPGAVE 16

Begrunn hvorfor en ellipse kan tegnes ved å holde en snor bundet i løkke stram rundt to faste stifter og en bevegelig blyant. Ved å bevege blyanten tegner den en ellipse med brennpunkt i de to faste stiftene. Bruk denne tegnemåten til å vise symmetriegenskapen til ellipsen ved å tenke deg at figuren holdes loddrett med blyanten erstattet med et lodd slik at ellipsen tangerer en vannrett bordplate.

OPPGAVE 17

Gitt et naturlig tall n. Kall midtpunktene på de lengste sidene i et rektangel for X og Y. Del hver halve kortside i n like store deler, og del hver halvdel av midtnormalen til XY i n like store deler. Nummerer delingspunktene på kortsidene fra midtpunktet, og delingspunktene på midtnormalen fra endepunktet. Vis at linjene gjennom X og delingspunkt nummer k på midtnormalen og linjene gjennom Y gjennom delingspunkt nummer k på kortsidene skjærer hverandre på en ellipse hvis akser er midtnormalene i rektangelet.

OPPGAVE 18*

Start med et sirkulært papir med et gitt fast punkt inne i sirkelen. Fold papiret slik at den brettede periferien passerer gjennom det faste punktet. Gjenta brettingen fra flere kanter. Vis at de brettede kantene vil være tangenter til en ellipse.

OPPGAVE 19

Klipp ut en trekant $\triangle ABC$. Tegn to linjer som skjærer hverandre. Beveg nå trekanten mens ett hjørne ligger på den ene linja og et annet ligger på den andre linja. Vis at det tredje hjørnet vil tegne en ellipse. (Denne metoden ble oppdaget av Leonardo da Vinci).

OPPGAVE 20

Fest to stifter og en blyant på en linjal. La linjalen bevege seg mens stiftene følger hver sin rette linje som står normalt på hverandre. Vis at blyanten vil tegne en ellipse. (Dette er et spesialtilfelle av oppgave 16.)

OPPGAVE 21

Hold den ene enden av en linjal fast, og fest en snor i den andre enden av linjalen og i et annet fast punkt i planet. Hold snoren stram rundt en blyant som kan bevege seg langs linjalen. Vis at ved å rotere linjalen vil blyanten tegne en del av en hyperbel med et brennpunkt i det faste punktet utenfor linjalen.

OPPGAVE 22*

Tegn en sirkel og et punkt F utenfor sirkelen. Trekk linjer gjenom F som skjærer sirkelen. Tegn normalene til disse linjene gjennom skjæringspunktene med sirkelen. Vis at disse vil tangere en hyperbel med brennpunkt i F.

OPPGAVE 23*

Tegn to linjer som skjærer hverandre. Merk av like mange punkter på hver linje fra skjæringspunktet og utover, slik intervallene mellom punktene alle er like store. Nummerer punktene i omvendt rekkefølge på de to linjene og trekk linjene mellom punkter med samme nummer. Vis at disse linjene vil tangere en parabel.

OPPGAVE 24*

Klipp ut en rettvinklet likebent trekant. Merk av et fast punkt og ei fast linje i planet. La hypotenusen til trekanten passere gjennom det faste punktet og la det motsatte hjørnet ligge på den faste linja. Vis at katetene vil være tangenter til en parabel med brennpunkt i det faste punktet og styrelinje langs den faste linja.

OPPGAVE 25

Finn ligningen til en generell sirkel i planet. Hvor mange punkter i generell posisjon trengs for å bestemme en sirkel?

OPPGAVE 26

Finn ligningen til en hyperbel med gitte asymptoter symmetrisk om aksene. Hvor mange punkter i generell posisjon trengs for å bestemme en hyperbel med disse asymptotene?

OPPGAVE 27

Finn ligningen til en generell parabel i planet. Hvor mange punkter i generell posisjon trengs for å bestemme en parabel?

OPPGAVE 28*

Dersom alle sidene i en trekant tangerer en parabel, så går den omskrevne sirkelen til trekanten gjennom brennpunktet til parabelen. Vis dette.

OPPGAVE 29

En sirkel med sentrum i origo skjærer x-aksen i $A = (-r, 0)$ og $B = (r, 0)$. La M være midtpunktet på normalen fra et punkt P på sirkelen på x-aksen. Finn det geometriske stedet for skjæringspunktet mellom AP og BM nå P beveger seg på sirkelen.

OPPGAVE 30

Gitt to linjer som står normalt på hverandre. Ei tredje bevegelig linje flytter seg slik at den sammen med de to faste linjene avgrenser en trekant med konstant areal. Finn det geometriske stedet for midtpunktet av hypotenusen til denne trekanten.

OPPGAVE 31

I en rettvinklet trekant ABC er C toppunktet for den rette vinkelen. $AC = a$ og $\angle A = 2v$. På hypotenusen AB ligger et punkt D slik at $\angle BCD = v$. Vis at trekanten ACD er likebent. Finn området for de verdier vinkelen v kan ha dersom vi skal ha $CD > BD$.
Regn ut CD og BD uttrykt ved a og v. Finn deretter $\sin v$ og v når $CD = 2BD$.

OPPGAVE 32

Sirkelen $x^2 + y^2 = R^2$ og punktet $(a, 0)$ på den positive x-aksen er gitt. Sirkelen skjærer y-aksen i punktene A og B.
Finn likningen for en parabel som har toppunkt i $(a, 0)$ og som går gjennom A og B. Hva blir brennpunktet i parabelen, og hva blir likningen for styrelinjen?
Når $a > R$, har parabelen, foruten skjøringspunktene A og B to andre skjøringspunkter med sirkelen, C og D. Finn koordinatene til C og D uttrykt ved a og R.

Vi tenker oss nå at $(a, 0)$ er et fast punkt, mens R varierer. Punktene C og D vil da følge en kurve. Finn likningen for denne kurven og forklar hva likningen betyr geometrisk.
Vis at parabeltangenten i punktet C skjærer x-aksen mellom $(a, 0)$ og $(2a, 0)$.

OPPGAVE 33

En rett linje L gjennom punktet $(2, 0)$ har vinkelkoeffisienten k, og en rett linje M gjennom punktet $(-4, 0)$ har vinkelkoeffisienten

$$\frac{2k}{k^2 - 1}$$

Skriv likningene for de rette linjene L og M. Finn de kravene vi må sette til k dersom L og M skal skjære hverandre.
Skjæringspunktet mellom L og M kaller vi S. Vis at den kurven som S følger når k varierer, er hyperbelen $3x^2 - y^2 = 12$.
Finn halvaksene, brennpunktene og likningene for asymptotene til denne hyperbelen.

OPPGAVE 34

Linjestykket $AB = a$ er gitt. Et punkt D ligger på AB mellom A og B. Om B er det slått en sirkel med radius BD. Et punkt C på sirkellinjen ligger slik at $\angle ABC = \angle ACD$. Kall $\angle ABC$ for v og finn de andre vinklene i $\triangle ABC$ uttrykt ved v. Vis at $AC^2 = AD \cdot AB$.
Vi setter $AD : DB = 1 : 3$. Finn sidene i $\triangle ABC$ uttrykt ved v. Vis at $AC^2 = AD \cdot AB$.

OPPGAVE 35

La D, E, F være fotpunktene for høydene i $\triangle ABC$. Vis at høydene i $\triangle ABC$ halverer vinklene i $\triangle DEF$.

OPPGAVE 36

La K_1 og K_2 være to sirkler med to felles punkter, og la l være den felles sekantlinja gjennom disse punktene. La m være ei linje som tangerer begge sirklene, K_1 i X og K_2 i Y. Vis at l skjærer m i midtpunktet mellom X og Y.

OPPGAVE 37

La $\triangle ABC$ være en trekant. C' være et punkt på AB, la B' være et punkt på AC og la A' være et punkt på BC. Vis at de omskrevne sirklene til trekantene $\triangle A'B'C$, $\triangle A'BC'$ og $\triangle AB'C'$ har et felles punkt.

OPPGAVE 38

Hvis A, C, E er tre punkter på en linje og B, D, F er tre punkter på en annen, og linjene AB og CD er parallelle til henholdsvis DE og FA, vis at EF og BC er parallelle.

OPPGAVE 39

La C og F være vilkårlige punkter på sidene AE og BD i parallellogrammet AEBD. La M og N være skjæringspunktet mellom CD og FA, henholdsvis EF og BC. La MN skjære DA i P og EB i Q. Vis at $AP = QB$.

OPPGAVE 40

To linjer på et ark er ikke parallelle men skjærer hverandre utenfor arket. Gitt et punkt P mellom linjene på arket. Forklar hvordan du kan konstruere en linje på arket gjennom P som i forlengelsen utenfor arket vil gå gjennom skjæringspunktet til de to linjene.

OPPGAVE 41

I et oktaeder med hjørner i $(1,0,0), (-1,0,0), (0,1,0), (0,-1,0), (0,0,1)$ og $(0,0,-1)$. Midtpunktene på hver av sidekantene som ikke ligger i $xy-$planet danner hjørnene i et polyeder. Hvor mange hjørner, kanter og sideflater har dette polyederet, og hvor stort er volumet? Midtpunktene på hver sidekant i oktaederet danner hjørnene til et nytt polyeder. Hva er volumet til dette?