

Innføring i beregning av måleusikkerhet

Henning Kolbjørnsen
sjefingeniør
avd. Nasjonal laboratorium
Justervesenet

E-post: henning.kolbjornsen@justervesenet.no

Telefon: 64 84 84 84

Måling og måleusikkerhet

Når vi veier eller måler hvor mye væske som har strømmet gjennom et rør, er det mange faktorer som påvirker resultatet.

Hvordan er vekta eller gjennomstrømningsmåleren kalibrert?

Når ble instrumentet kalibrert eller verifisert?

Ved hvilke målepunkter og betingelser ble kalibrering gjennomført?

Hvor stor er feilen i dagens måling ???

Måleusikkerheten ved kalibrering og revisjon

Kalibrering er den frivillige kontroll med et måleinstrument som fastsetter instrumentets **feilvisning** med en viss **måleusikkerhet**.

Revisjon er den myndighetspålagte kontroll med måleinstrumenter som fastslår om instrumentets avvik er innenfor gitte **toleransegrenser**. Det stilles krav til hvor stor **måleusikkerheten** får være.

For beregning av utslipp av CO₂ er kravet knyttet til måleusikkerheten direkte!

Måleusikkerheten CO₂ -utslipp

$$\text{CO}_2\text{-utslipp} = \text{aktivitet} \cdot \text{utslippsfaktor} \cdot \text{oksydasjonsfaktor}$$

Aktivitetsdata: Måleresultater som beskriver omfanget av aktivitet for et år.
Aktivitetsdata kan angis i energiinnhold.

Utslippsfaktor: Gir utslipp i masse CO₂ relativt til energiinnhold

Oksydasjonsfaktor: Angir andel fullstendig oksydert karbon.

Hvor er den største usikkerheten?

Veiing og flowmåling

Veiing

Vektenes nøyaktighet er tett knyttet til deres deling.

Vektene kalibreres med lodd, men brukes til å veie materialer med en annen tetthet. Veies vann, vil ulik oppdrift på stål og vann gi ca. 1 promille for mye vann.

Vekter må kalibreres på stedet bl.a. p.g.a. variasjon i tyngdekraft og for å fange montasjeforhold

Måling av flow

Flowmålere kalibreres ofte i laboratorium under idealiserte betingelser.

Det er store effekter knyttet til kombinasjon måleprinsipp og medium, tetthet, temperatur, trykkforhold, strømningsprofiler, slitasje m.m.

Effekt avhenger av om måleprinsippet er basert på hastighetsmåling, volumstrømning eller massestrømning.

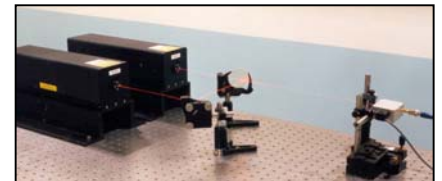
Sporbarhet

De fundamentale målestørrelsene fremkommer gjennom realisering eller som et referanseobjekt (prototype).

Masse Massen 1 kg er gitt av masseprototypen i Paris.
(prototype)



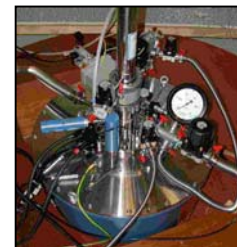
Lengde Lengden realiseres med en frekvensstabilisert
laser (rødt lys, c er en naturkonstant)



Spenning Volt realiseres i et Josephson oppsett.
(naturkonstanter og frekvens)



Motstand Resistans realiseres i et kvantisert Hall-effekt
oppsett. (naturkonstanter)

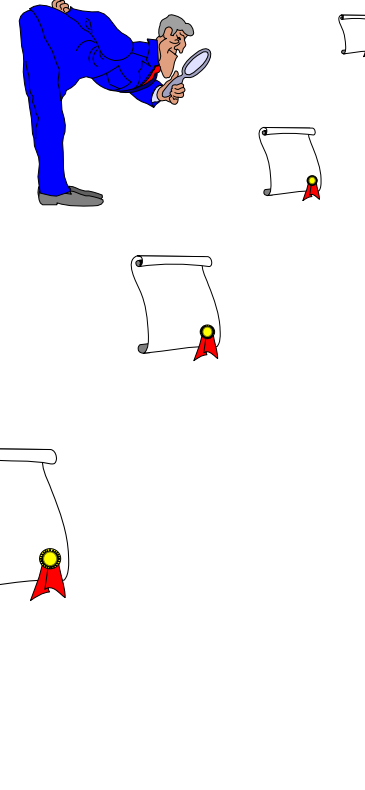


Sporbarhet (forts.)

Sporbar kalibrering betyr at resultatet av kalibreringen relaterer seg, i en **dokumentert** kjede av kalibreringer opp til nasjonal eller internasjonal referanse.

For hvert ledd i kjeden vil usikkerheten i forhold til hva som er "sann verdi" øke.

Kalibreringsresultatet skal **alltid***) inneholde både måleverdi og tilhørende måleusikkerhet.



*) ISO 17 025, pkt 5.6: Dersom måleusikkerhet ikke er angitt i kalibreringsbeviset er kalibreringen ikke sporbar. Det stilles altså krav til hvordan måleresultatet angis i kalibreringsbeviset: Usikkerhetsangivelsen må være med.

"Kalibrering"

fra internasjonal ordliste for metrologi (VIM)

En kalibrering er sammenligning av et instruments visning mot et annet instruments visning med større nøyaktighet.

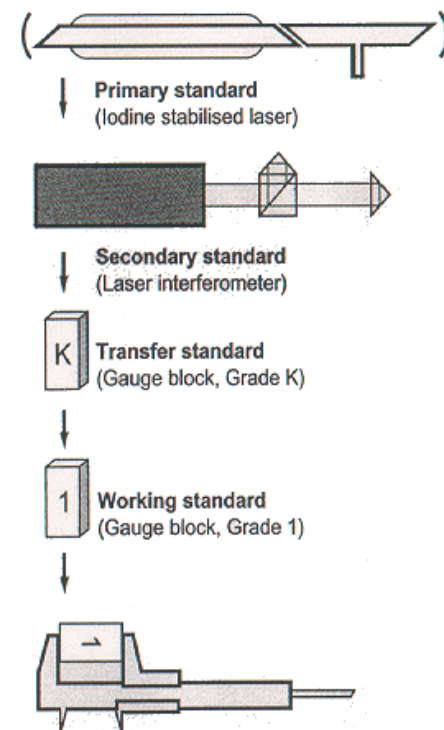
En kalibrering sier kun noe om instrumentets egenskaper på det tidspunkt kalibreringen utføres.

Kalibreringen dokumenteres gjennom kalibreringsbeviset.

Kalibreringenes troverdighet er sterkt varierende.

Kalibreringer må gjennomføres på nytt utstyr og normalt også periodisk.

Definisjonen av kalibrering inkluderer ikke innregulering.



Måleresultatet

Et måleresultat består både av måleverdi og et intervall rundt denne der den "sanne" verdien med stor sannsynlighet ligger.

Måleverdi $\pm$ måleusikkerhet

Rapportering med en erklæring om overensstemmelse baserer seg på både måleverdi og måleusikkerhet.

Har sjåføren kjørt for fort?

Er temperaturen på fryselageret for høy?

Er el-måleren nøyaktig nok?

Beregning av måleusikkerhet

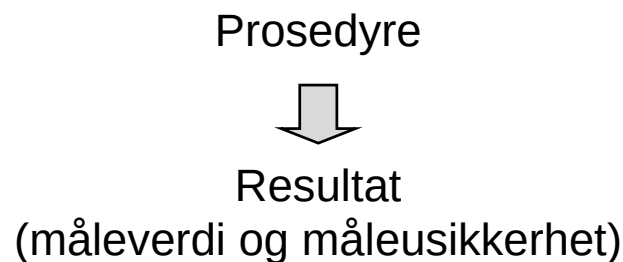
Er prosedyren for kalibreringen / prøvingen klar?

Prosedyren påvirker målefunksjonen og vurderingen av måleusikkerhetene

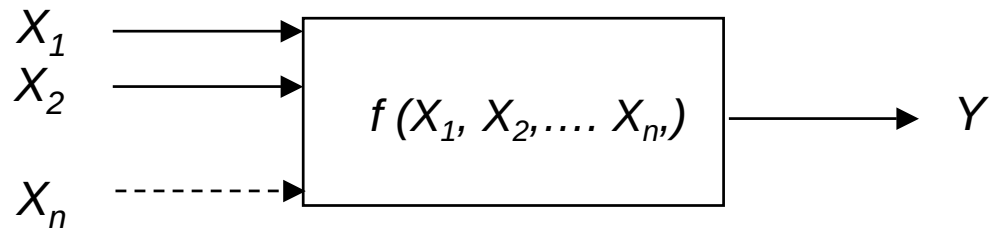
En prosedyre beskriver alle vesentlige forhold knyttet til kalibreringen / prøvingen på en slik måte at en kvalifisert medarbeider kan gjennomføre arbeidet.

Prosedyren valideres gjennom sammenligninger.

For prøvinger er det akseptert at ulike prosedyrer kan gi ulike resultat.



Målefunksjonen (teoretisk)



$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

Eksempel:

$$Y = X_1 + X_2$$

X_i : inngangsstørrelse

Y : utgangsstørrelse

Målefunksjonen (*estimerte verdier*)

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

x_i : estimat for inngangsstørrelsen

y : estimat for utgangsstørrelsen

Eksempel:

$$\begin{aligned} y &= x_1 + x_2 \\ &= 2,3\text{ cm} + 2,6\text{ cm} \\ &= 4,9\text{ cm} \end{aligned}$$

Usikkerhetskomponentene

$$\begin{array}{ccccccc} y & = & f & (& x_1, & x_2, & \dots, & x_n &) \\ \downarrow & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ u_c(y) & & & u(x_1) & & u(x_2) & & u(x_n) & \end{array}$$

Estimator:

$u_c(y)$: kombinert standard usikkerhet

$u(x_i)$: standard usikkerhet i x_i

Eksempel 1: Måling av forbrukt mengde

Sett at det skal etableres en verdi for forbruket av en vare i løpet av 1 år. Det er en viss lagerbeholdning ved årets start og slutt. I tillegg er det tre leveranser av varen i løpet av året.

Målefunksjonen kan dermed skrives slik:

$$Y_1 = A_1 + A_2 + A_3 + B - C$$

der: Y er årsomsetning

A_i ($i=1..3$) er mottatt levering av vare nr i (veiet på samme vekt)

B er lagerbeholdning ved årets slutt (bestemt med visuell metode)

C er lagerbeholdning ved årets start (bestemt med visuell metode)

Eksempel 2: Kontinuerlig måling av flow

I dette tilfellet er det to gjennomstrømningsmålere som måler gjennomstrømt volum. Det er samme medium som strømmer i begge målere. Årlig aktivitet (gitt i masse) fremkommer ved å multiplisere summen av integrert standardvolum med gjennomsnittlig tetthet.

Målefunksjonen under kan være et eksempel på denne situasjonen:

$$Y_2 = (V1_{STD} + V2_{STD}) \cdot \bar{\rho}_{STD}$$

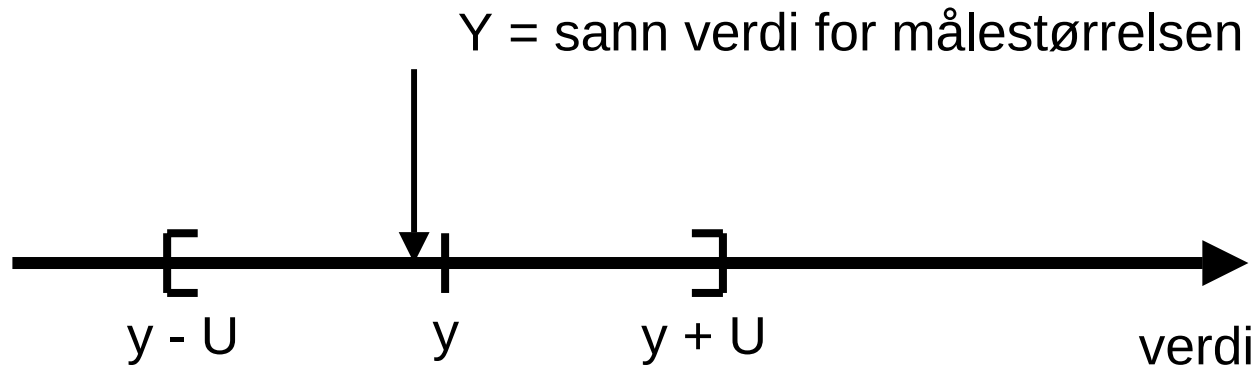
der: Y_2 er årssomsetning

$V1_{STD}$ og $V2_{STD}$ er akkumulert standardvolum (0 °C, 1 atm)

$\bar{\rho}_{STD}$ er årlig gjennomsnittlig tetthet til gjennomstrømt medium ved standard betingelser

Måleusikkerhet

Måleusikkerheten angir et intervall rundt den estimerte måleverdien hvor det er stor sannsynlighet for at den "sanne" verdien ligger.



$$y - U < Y < y + U$$

y : målt verdi

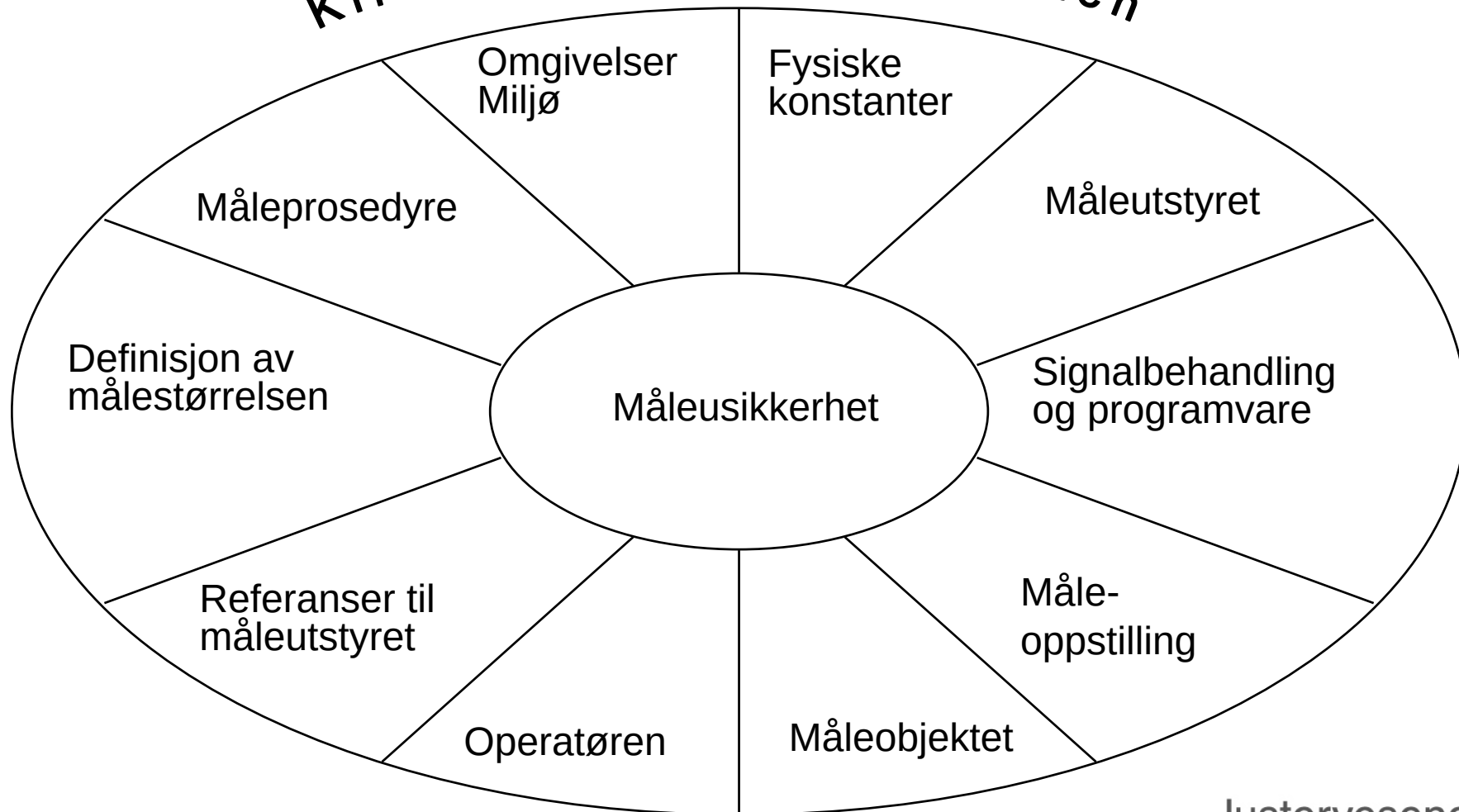
U : utvidet måleusikkerhet

Beregning av måleusikkerhet

Noen viktige trinn i beregning av måleusikkerhet:

1. Først må målemetoden / prøvingsmetoden / kalibreringsmetoden være klarlagt. Det må være klart hva som skal måles (målestørrelsen). Dette kan gjerne være en relativ verdi.
2. Er det mulig, settes det opp en "målefunksjon" for å beskrive hvilken sammenheng det er mellom målestørrelsen (utgangsstørrelsen) og observasjoner, påvirkningsfaktorer m.m. (inngangsstørrelser). For å hjelpe seg med å finne alle relevante inngangsstørrelser kan det benyttes et såkalt "årsak- og effektdiagram"
3. Å beregne/estimere måleusikkerheten er styrt gjennom et internasjonalt "vedtatt" dokument: Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement (GUM). Dette dokumentet er normalt referert som grunnlag for alle metodebeskrivelser knyttet til å estimere måleusikkerhet. Utfordringen ligger i å estimere usikkerheten i de ulike inngangsstørrelsene. Når dette er klart, er metodikken klarlagt.
4. Når måleverdi og måleusikkerhet er klar, kan eventuelle vurderinger av overensstemmelse gjennomføres.
5. Et usikkerhetsbudsjett er et kraftig verktøy for å sette fokus på svakheter i metoden og forbedre metoden.

Kilder til måleusikkerheten



Tabell for usikkerhetsbudsjettet

Tabellen anbefales brukt i NA Dok 52 (EA-4/02). Den gir en god oversikt over alle usikkerhetskomponentene knyttet til kalibreringen.

Målefunksjon: $Y = f(X_1, X_2, \dots, X_N)$ (teoretisk)
 $y = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$ (estimert)

Inngangs- størrelse X_i	Verdi på inngangs- størrelsen x_i	Standard usikkerhet $u(x_i)$	Følsomhets- faktor c_i	Bidrag til total måleusikkerhet $u_i(y)$
X_1				
X_2				
•				
•				
X_N				
Y	$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$			$u_C(y)$

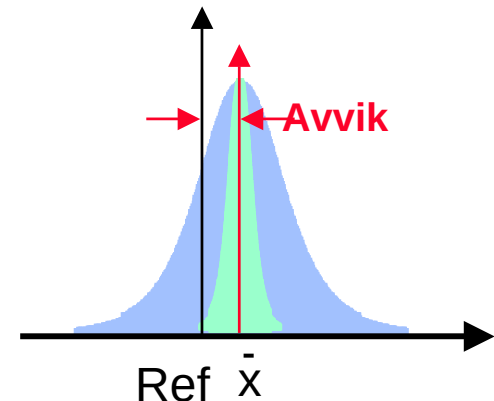
Utvidet usikkerhet ($U(y)$) med ca. 95 % deknings sannsynlighet fremkommer ved å multiplisere kombinert usikkerhet $u_C(y)$ med k . For normalfordelt kombinert usikkerhet benyttes $k=2$.

Relativ utvidet usikkerhet fremkommer ved å dividere utvidet usikkerhet på måleverdien: $U(y)/y$.

Repeterbarhet

Når vi gjør repeterte målinger for å finne et gjennomsnitt, ønsker vi **minst mulig variasjon**.

Alle observasjonene gir oss et bedre bilde på hvordan variasjonene er – eller sagt på en annen måte, hvor stort standardavviket er.



Bidrag til måleusikkerheten

Siden vi som måleresultat benytter gjennomsnittet av flere målinger, er usikkerheten knyttet til gjennomsnittet. Måleusikkerheten knyttet til variasjon i middelerverdi er dermed gitt som:

$$u_{\text{repeterbarhet}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

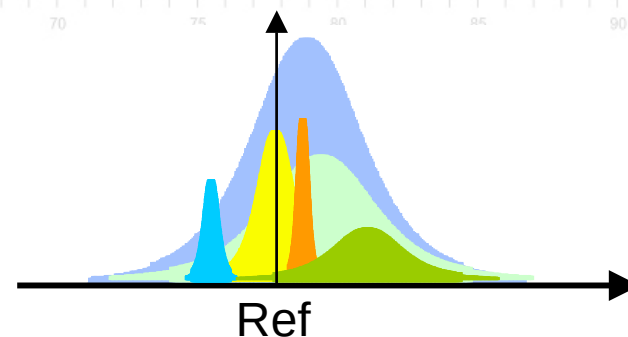
s: observert standardavvik

n: antall observasjoner

Reproduserbarhet

Når vi gjør reproduserte målinger ønsker vi å kartlegge hele variasjonsbredden.

Reproduserbarheten gir kunnskap om den samlede betydningen av at mange effekter bidrar til variasjon.



Bidrag til måleusikkerheten

Reproduserbarheten fanger mange (alle?) tilfeldige og systematiske effekter. Nye målinger vil dermed gi nye bidrag til den totale spredningen.

Dersom vi ikke korrigerer for de systematiske effektene, vil hele variasjonsbredden bidra til måleusikkerhet.

Dersom vi gjør korreksjoner for systematiske effekter blir reproduserbarheten mindre, men de bidrar likevel til måleusikkerhet, fordi det gjenstår en usikkerhet i korreksjonene.

$$u_{\text{reproduserbarhet}} = s$$

s: observert standardavvik

GUM ("Guide to the Expression of Uncertainty in Measurements") anbefaler å korrigere for **alle systematiske effekter**. GUM-metoden er et **verktøy til forbedring** av målingene.

Repeterbarhet og reproduserbarhet i VIM *(pr def)*

Den internasjonale ordlisten for metrologi, VIM ("International Vocabulary of Basic and General Terms in Metrology") gir følgende definisjoner (min oversetting):

Repeterbarhet (til et måleresultat)

Variasjon i etterfølgende måleresultater av samme målestørrelse under identiske forhold (repeterbare forhold).

Reproduserbarhet (for et måleresultat)

Variasjon i måleresultat av samme målestørrelse under endrede forhold. (operatør, måleinstrument, referanse, tid, sted, måleprinsipp, målemetode,...)

Usikkerhetsbidrag klassifiseres i to typer

Type A usikkerhet: Statistisk analyse av en serie repeterte målinger.

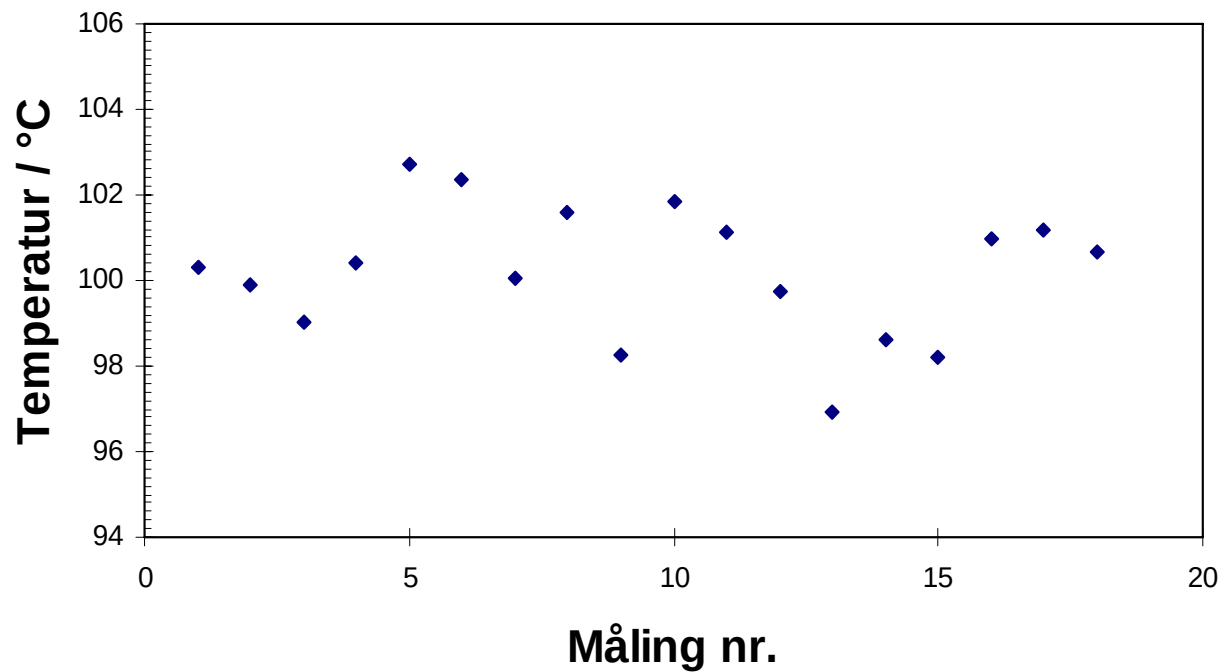
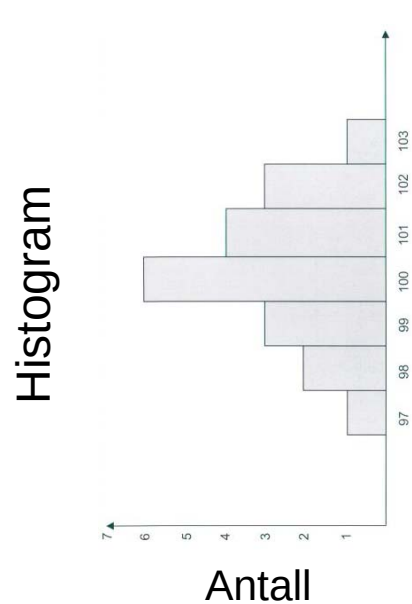
Den estimerte variansen $u^2(x_i)$ (eller standard usikkerheten $u(x_i)$) til estimatet x_i av en inngangsstørrelse X_i , som er bestemt ved en statistisk analyse av en serie observasjoner gjort under identiske betingelser kalles type A varians.

Type B usikkerhet: Alle bidrag som ikke er fremkommer på bakgrunn av spredning i observasjoner.

Den estimerte variansen $u^2(x_i)$ (eller standard usikkerheten $u(x_i)$) til estimatet x_i av en inngangsstørrelse X_i , som **ikke** er bestemt ved gjentatte målinger, bestemmes ved “vitenskapelig” vurdering basert på all mulig tilgjengelig informasjon om variasjonen av X_i og kalles type B varians. (kalibreringsbevis, drift, temperaturpåvirkning, oppløsning m.m.)

Statistisk analyse

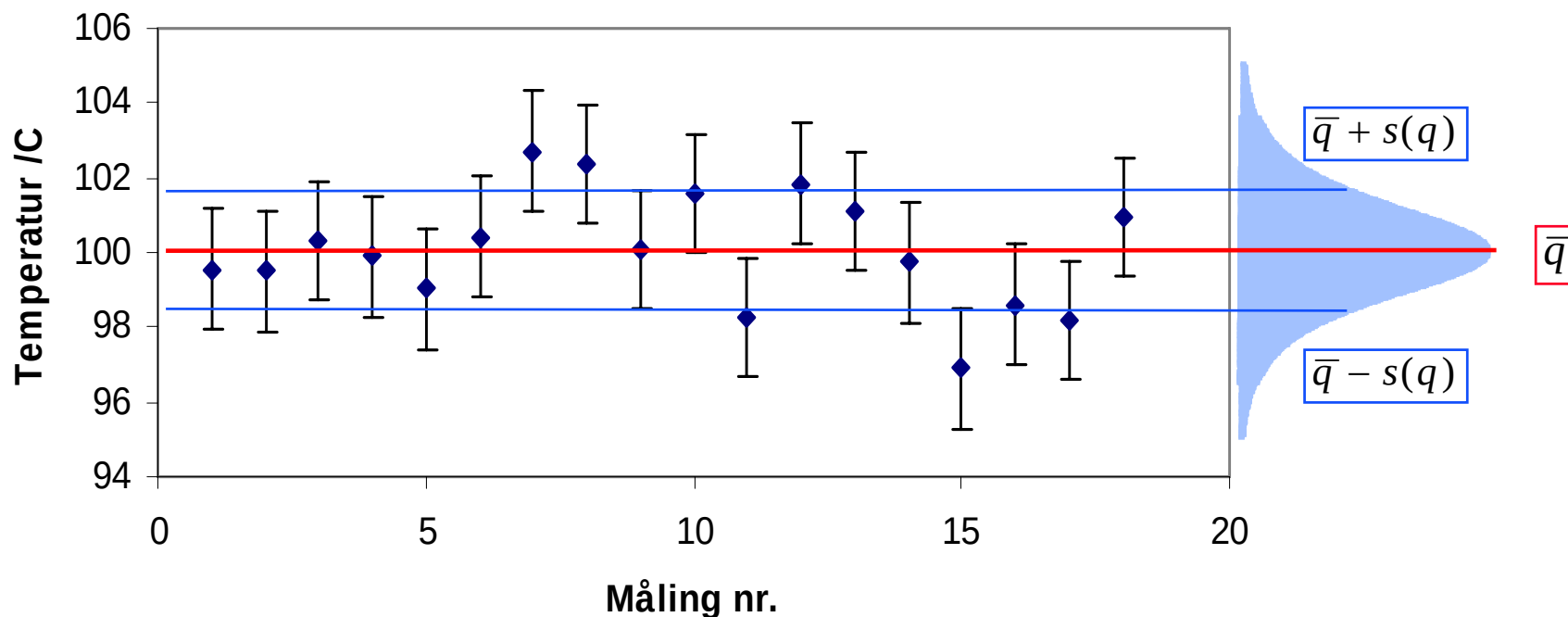
Repeterte temperaturmålinger



Statistisk analyse av en serie repeterte målinger

Estimert middelværdi og spredning i enkeltverdi

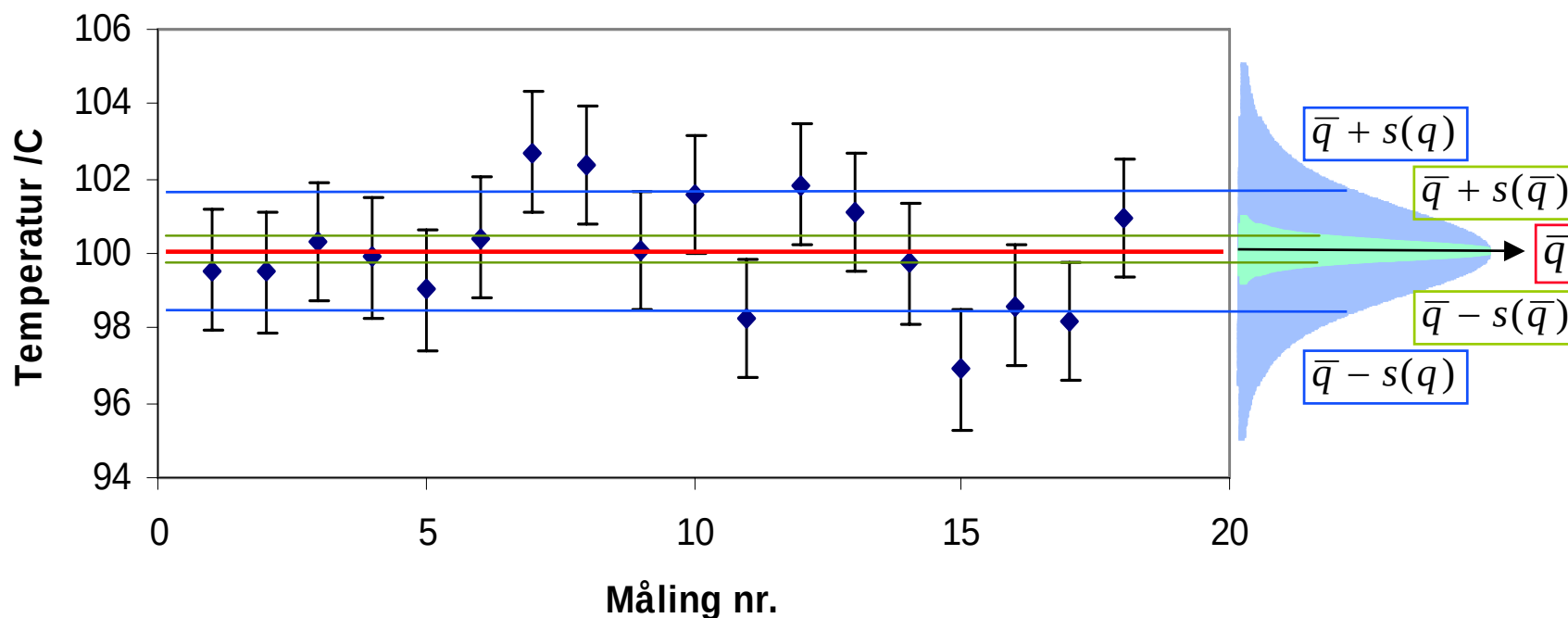
Temperaturmåling



Statistisk analyse av en serie repeterte målinger

Estimert middelværdi, spredning i enkeltverdi og i middelværdi

Temperaturmåling



Beregning av middelerdi og standardavvik

(estimert middelerdi og standardavvik)

Gjennomsnittet $\bar{q}$ finnes slik:

$$\bar{q} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n q_i = \frac{1}{n} (q_1 + q_2 + \dots + q_n)$$

og variansen (kvadratet av standardavviket) s^2 finnes slik:

$$s^2(q) = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (q_k - \bar{q})^2$$

($s(q)$ = eksperimentelt standardavvik til enkeltverdi)

Standard usikkerhet type A

Hvis en måling gjentas (repeterte målinger av samme måleobjekt under like forhold), øker kunnskapen om middelveiden til måleobjektet, og standard måleusikkerhet (type A usikkerhetsbidrag) er gitt ved:

$$s^2(\bar{q}) = \frac{s^2(q)}{n}$$

$$\left[s(\bar{q}) = \sqrt{s^2(\bar{q})} = \frac{s(q)}{\sqrt{n}} \right]$$

$s(\bar{q})$: eksperimentelt standard avvik til middelveiden

Informasjon som gir grunnlag for type B usikkerhet

- tidligere måleresultater med usikkerhet angitt i tilknytning til resultatene
- data fra kalibreringsbevis og andre bevis
- instrumentets spesifikasjoner
- drift i instrumentet siden siste kalibrering
- erfaring eller annen kunnskap om målemetoden og måleprosedyren

Standard usikkerhet for type B komponenter

Alle usikkerhetsbidrag må representeres med en standard usikkerhet for å kunne kombineres.

- Gitt fordelingsfunksjonens fasong (normal, firkant, trekant ...) vil spredningen representert ved et standardavvik være gitt.
- Det er god skikk å overestimere ved å velge en konservativ fordelingsfunksjon.

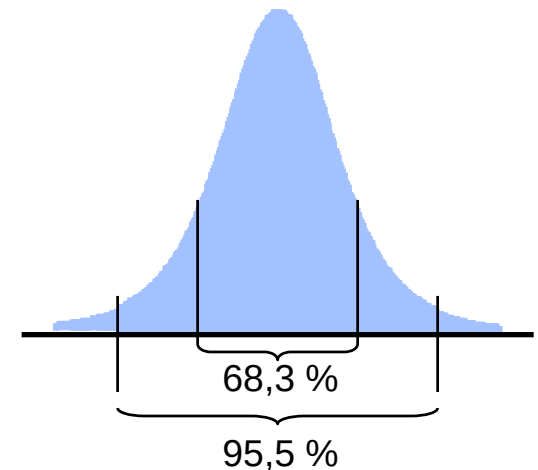
HUSK:

Kjente feil skal det korrigeres for. De skal ikke behandles som usikkerheter. Det er normalt en usikkerhet knyttet til dette avviket.

Normalfordeling

I kalibreringsbevis er normalt usikkerheten rapportert å være normalfordelt. Det angis som usikkerhet et intervall av fordelingen som dekker ca. 95 %.

For en normalfordeling dekker et intervall på ± 1 standardavvik 68,3 %. Hvis standardavviket i en normalfordeling multipliseres med 2, finnes et intervall som dekker 95,5 % av fordelingen.

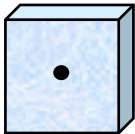


En standard usikkerhet finnes dermed ved å divider på dekningsfaktoren 2.

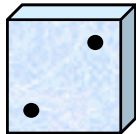
$$u(x_i) = \frac{U}{2}$$

Firkantfordeling

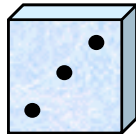
Vi ser på fordelingsfunksjonen til et terningkast. Terningen kan vise 6 forskjellige tall, og det er like stor sannsynlighet for alle verdier fra 1 til 6.



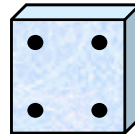
$1/6$



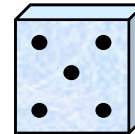
$1/6$



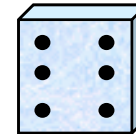
$1/6$



$1/6$

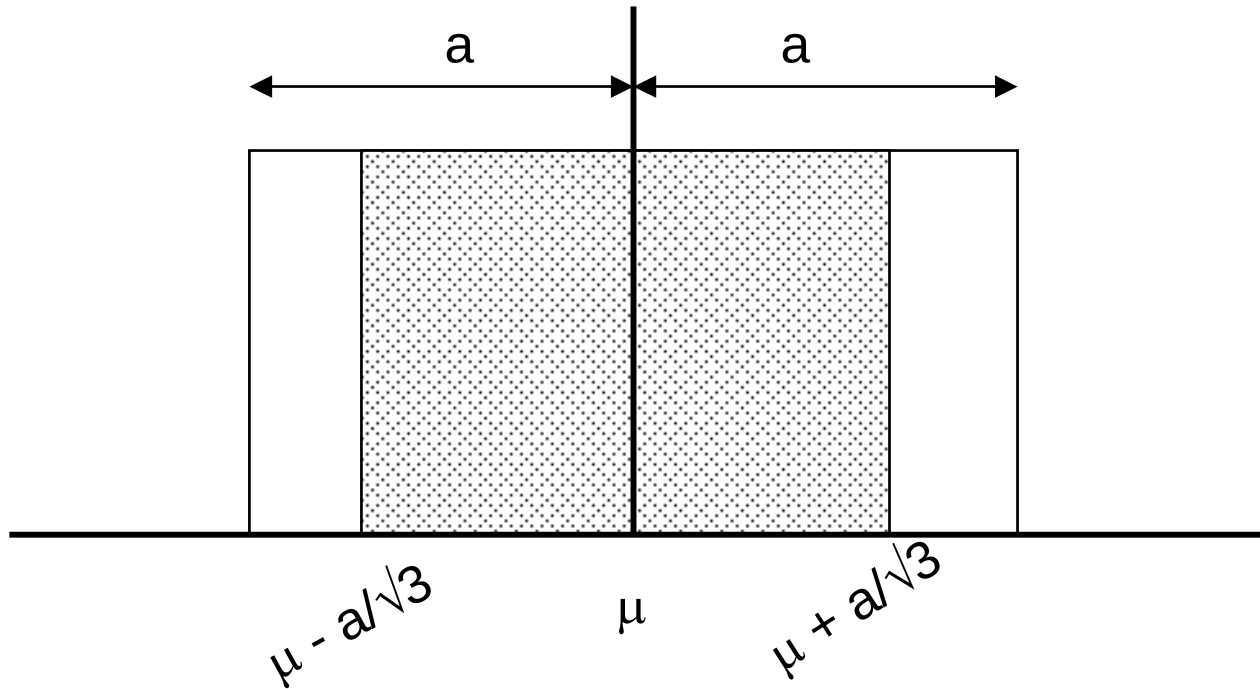


$1/6$



$1/6$

Firkantfordeling (forts.)

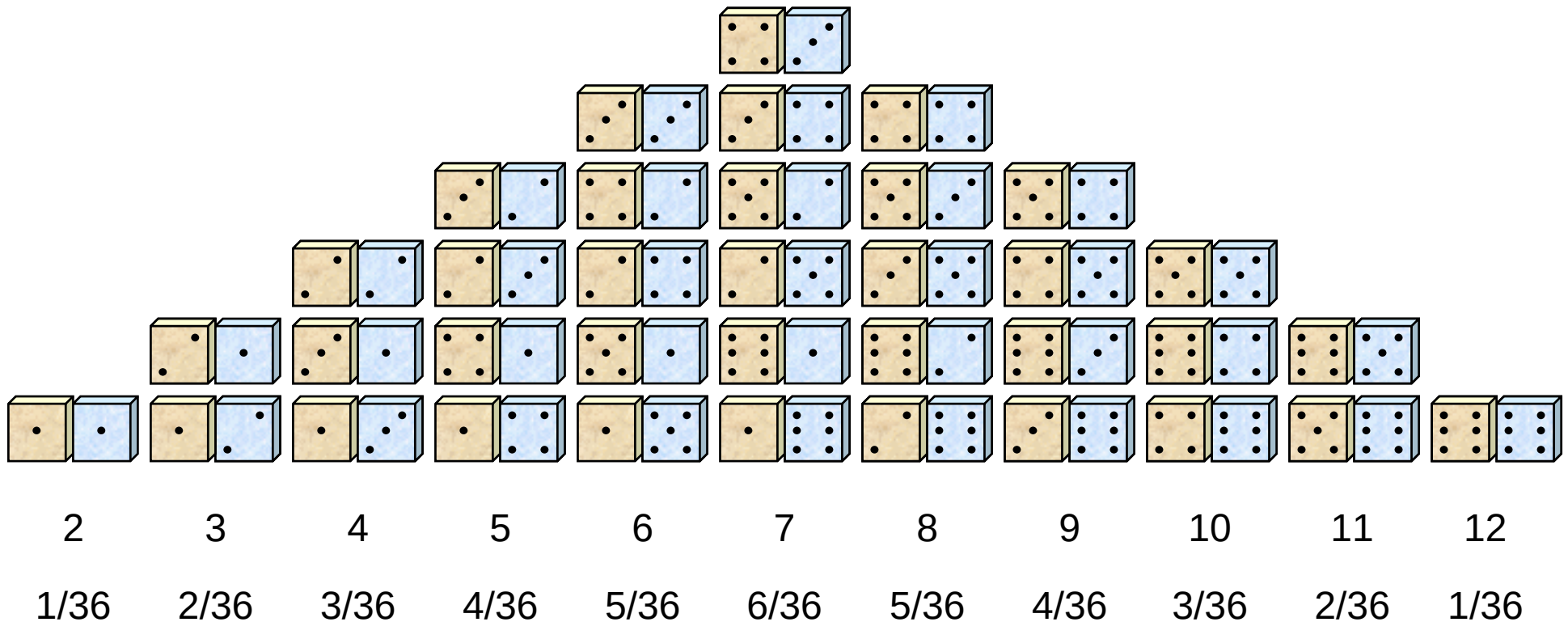


$$u^2(x_i) = \frac{a^2}{3}$$

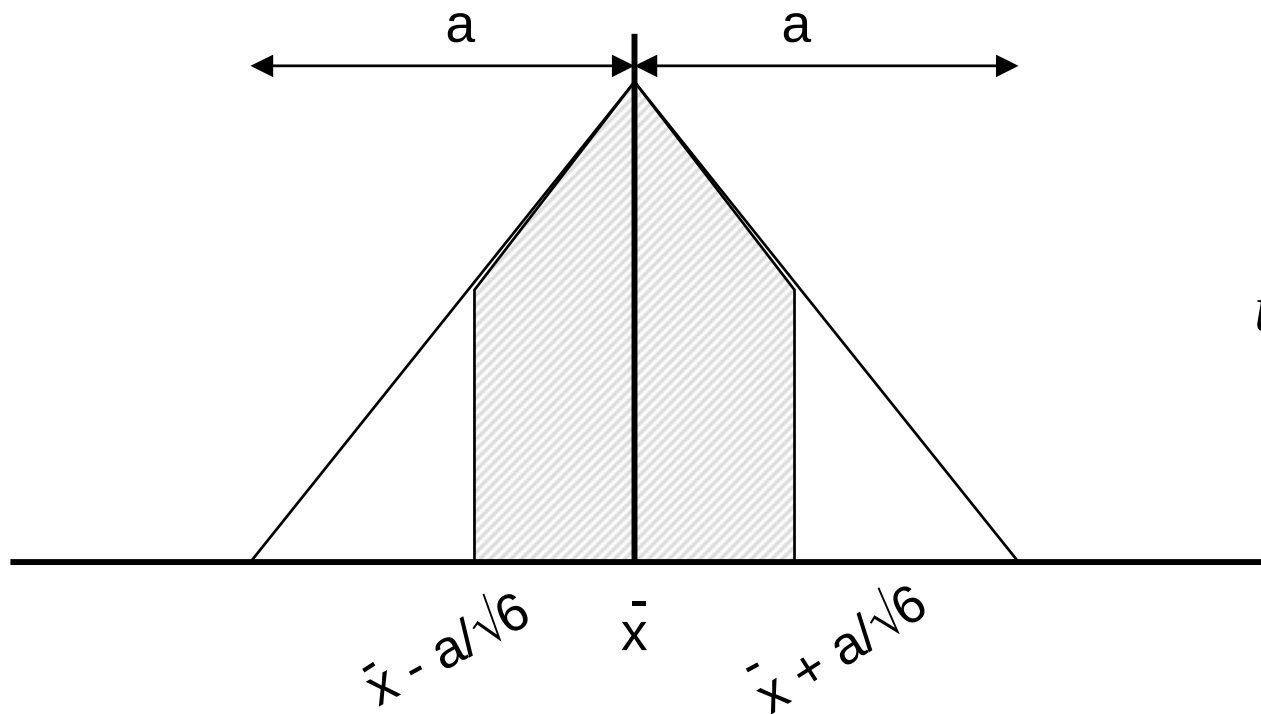
$$u(x_i) = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

Trekantfordeling

Vi ser på summen av to terninger. Den kan ha verdier fra 2 til 12. Hvis vi ser på antall forskjellige måter vi kan få de ulike verdiene, vil det gi en trekantfordeling:

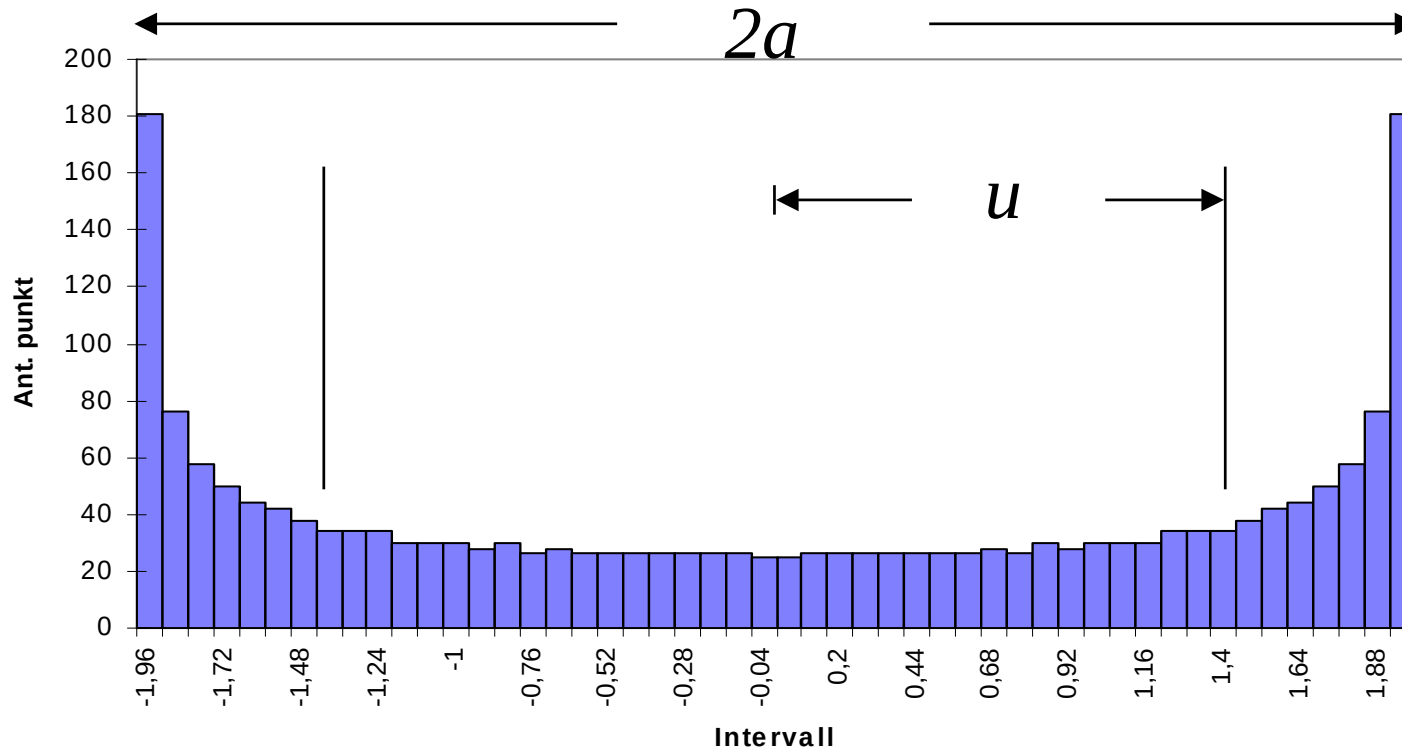


Trekantfordeling (forts.)



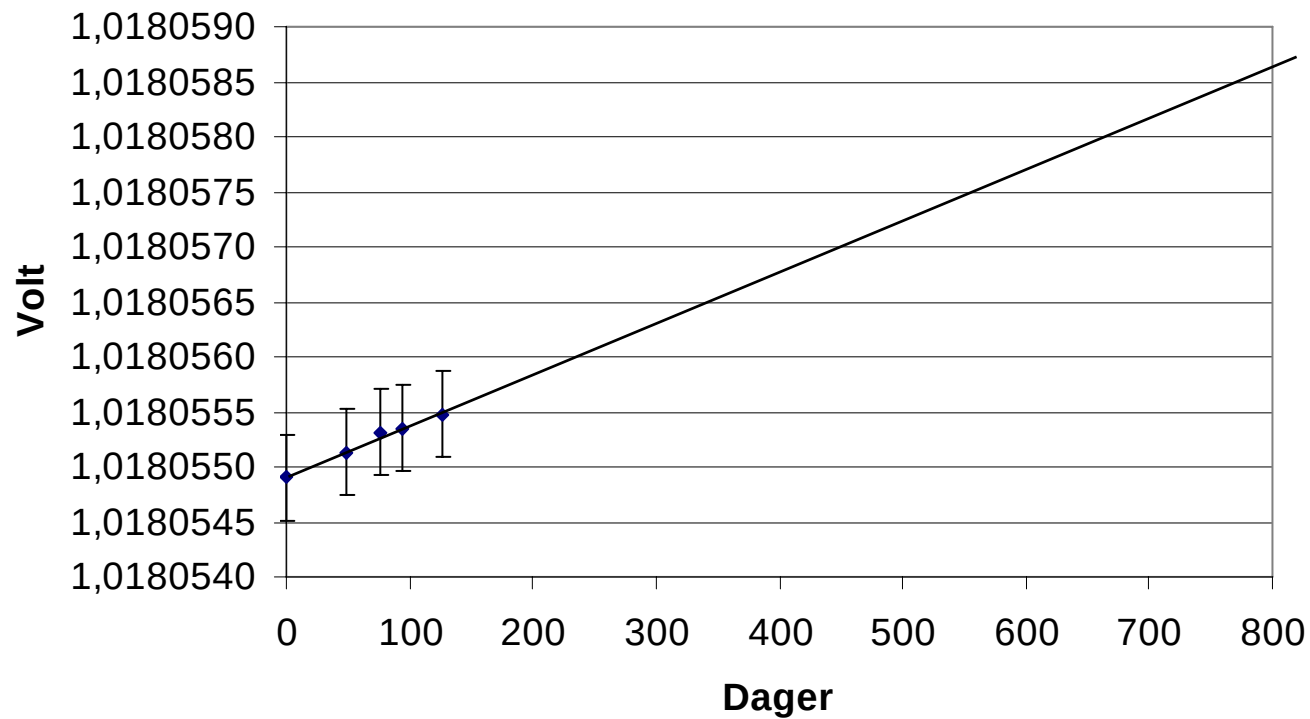
$$u(x_i) = \frac{a}{\sqrt{6}}$$

U-fordeling

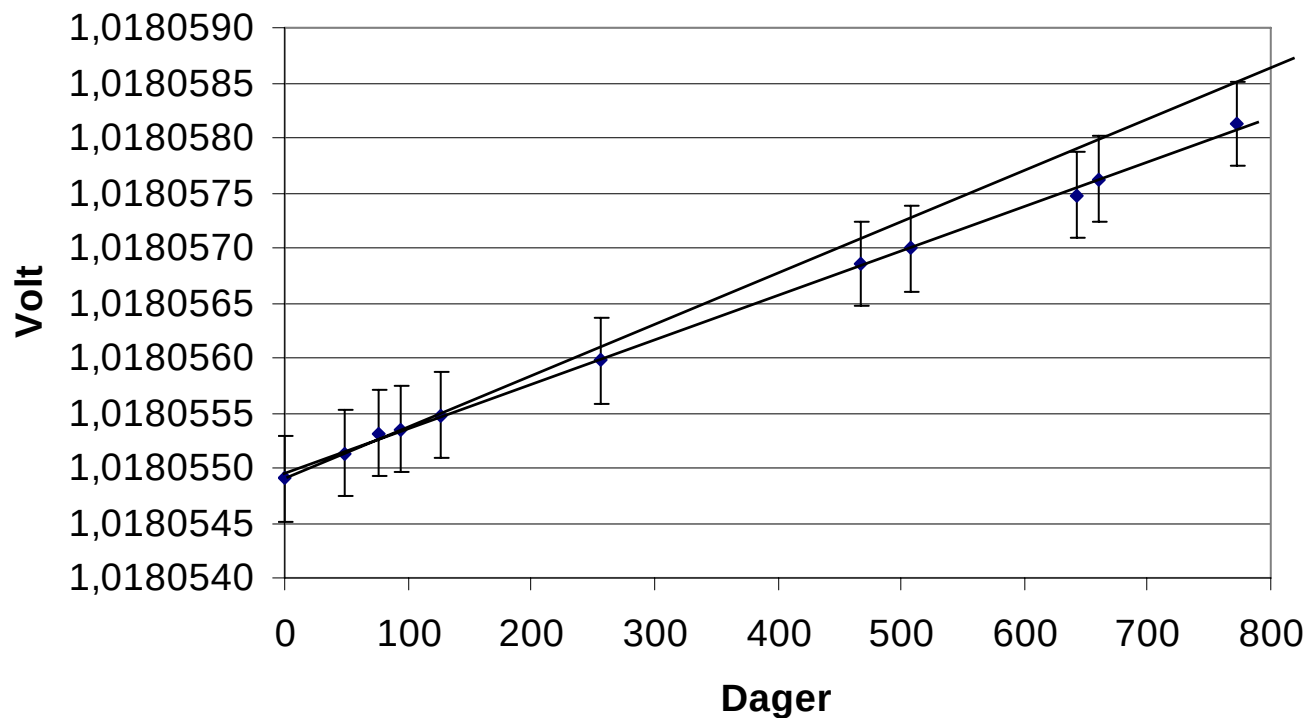


$$u(x_i) = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

Drift til en spenningsnormal

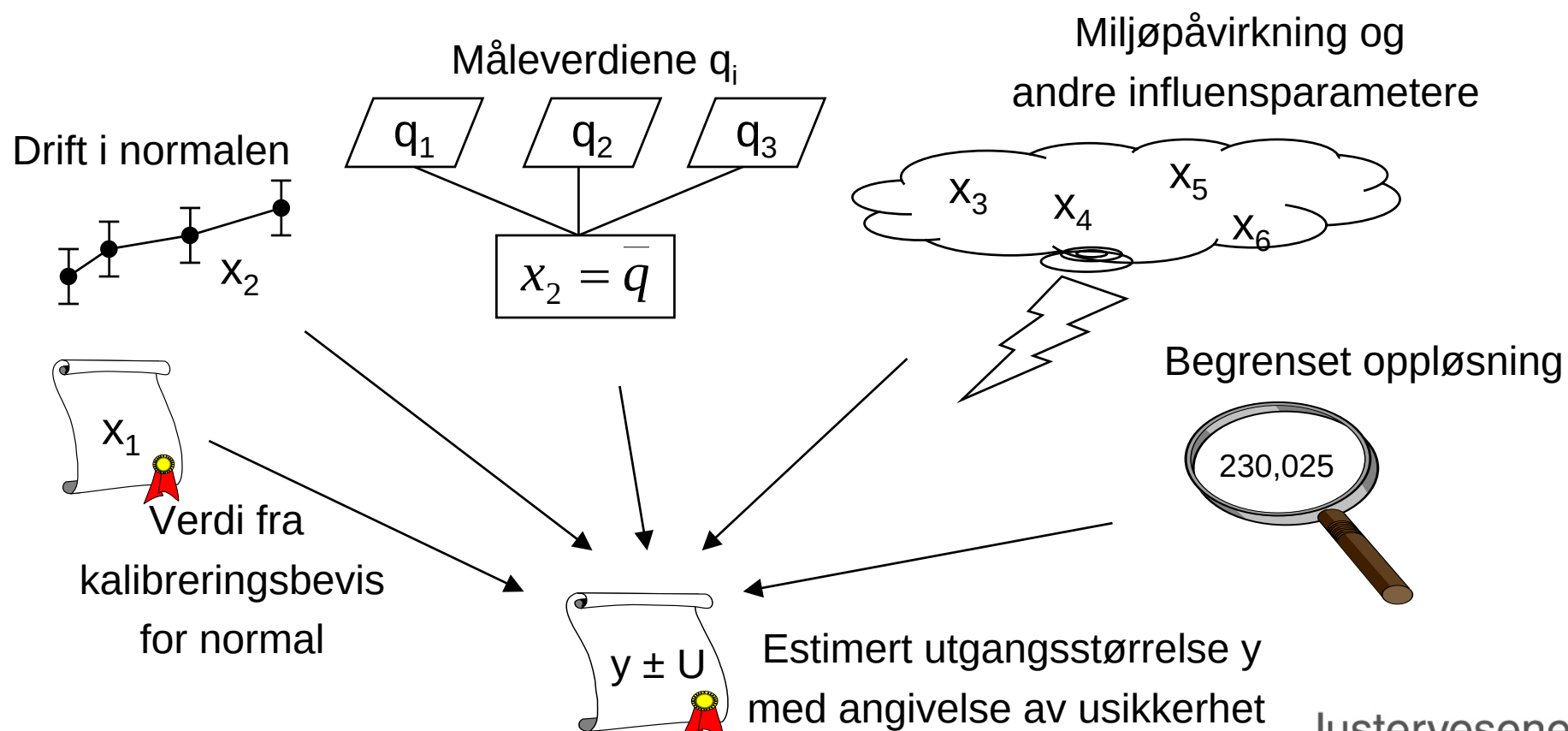


Drift til en spenningsnormal (forts.)



Kombinering av usikkerheter

Alle inngangsstørrelsens usikkerhetskompontener kombineres for å gi måleusikkerheten i resultatet, $u_c(y)$.



Kombinering av usikkerhetskomponenter

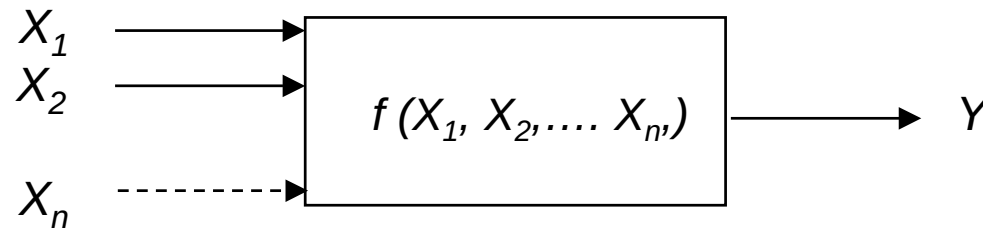
Vi har målefunksjonen:

$$\begin{array}{ccc} y = f(x_1, x_2, \dots) \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \searrow \\ u_c(y) \quad u(x_1), u(x_2), \dots \end{array}$$

Vi finner standard usikkerhetene, u , til inngangsstørrelsene, x_i .

Fra alle $u(x_i)$ ønsker vi å bestemme den kombinerte standard usikkerheten $u_c(y)$ til målestørrelsen y .

Følsomhetsfaktor



$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_n) = c_1 X_1 + c_2 X_2 + \dots + c_n X_n$$

X_i : inngangsstørrelse

Y : utgangsstørrelse

Følsomhetsfaktoren kan måles

Følsomhetsfaktoren, c_i , kan bestemmes eksperimentelt eller gjennom partiell derivasjon av målefunksjon.

Eksperimentelt / måling

La x_i endres med en liten størrelse Δx_i , og observer hvor mye f endrer seg, Δf .

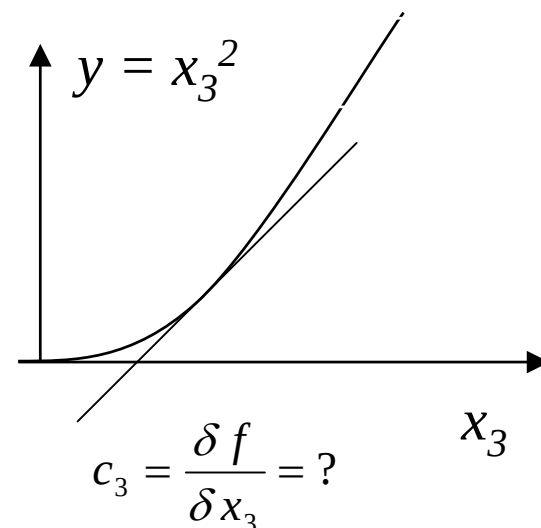
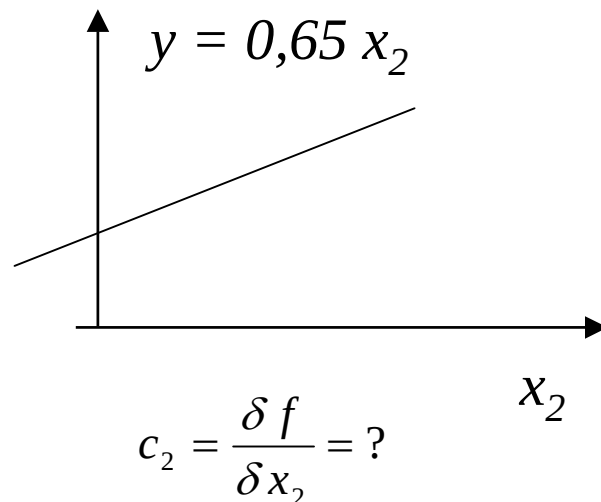
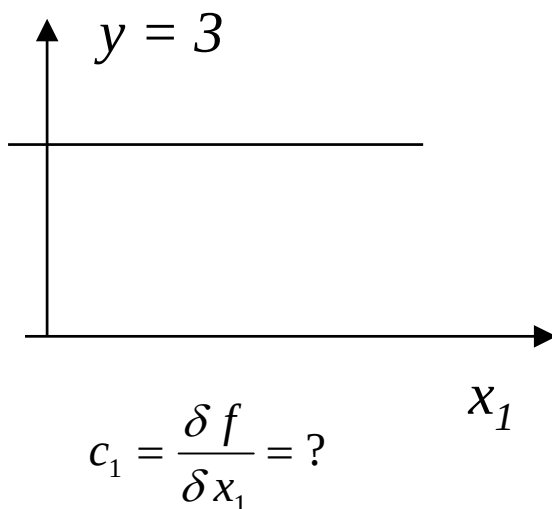
$$c_i = \frac{\Delta f}{\Delta x_i}$$

For å få et godt signal å måle på, kan det være nødvendig å la Δx_i og Δf være nokså store. Da bør ulineære effekter også undersøkes.

Følsomhetsfaktor beregnet ved derivasjon

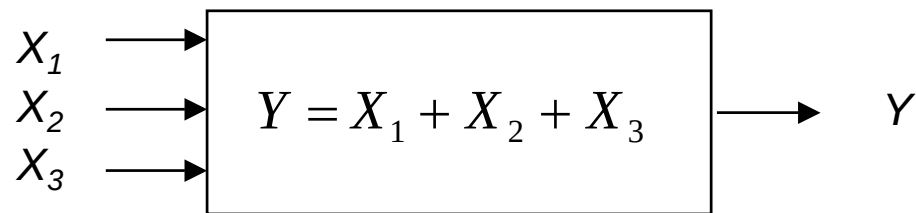
Derivasjon

Følsomhetsfaktoren, c_i , forteller hvordan utgangsstørrelsen y varierer som følge av variasjoner i inngangstørrelsen x_i .



Eksempler på følsomhetsfaktorer

Målefunksjon:



Følsomhetsfaktorer:

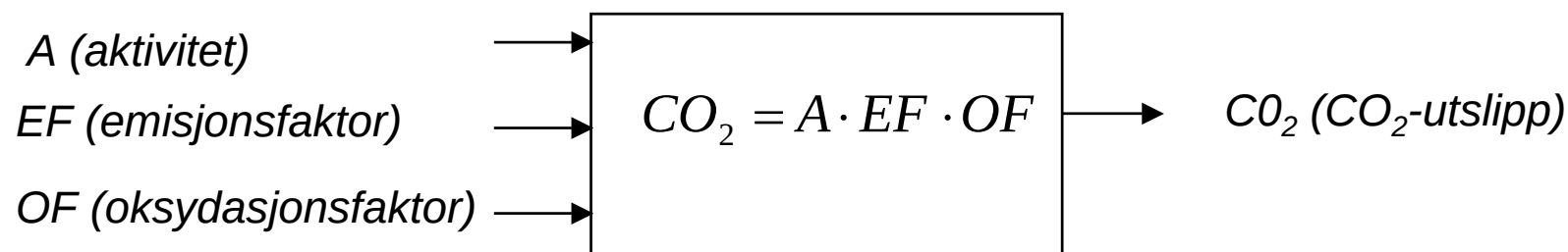
$$c_1 = \frac{\partial Y}{\partial X_1} = 1$$

$$c_2 = \frac{\partial Y}{\partial X_2} = 1$$

$$c_3 = \frac{\partial Y}{\partial X_3} = 1$$

Eksempler på følsomhetsfaktorer

Målefunksjon:



Følsomhetsfaktorer:

$$c_A = \frac{\partial CO_2}{\partial A} = EF \cdot OF$$

$$c_{EF} = \frac{\partial CO_2}{\partial EF} = A \cdot OF$$

$$c_{OF} = \frac{\partial CO_2}{\partial OF} = A \cdot EF$$

Kombinert standard usikkerhet (Generell form, hentet fra GUM)

$$u_c^2(y) = \underbrace{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i)}_{\text{"Vektet" varians}} + 2 \underbrace{\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j)}_{\text{"Vektet" kovarians}}$$

Varians: $\text{Var}(x_i)$ Kovarians: $\text{Cov}(x_i, x_j)$

Dersom inngangsstørrelsene er uavhengige (ukorrelerte), er dette kovariansleddet lik 0.

Dersom inngangsstørrelsene påvirkes slik at de svinger i takt med hverandre som følge av påvirkningen, har de en positiv kovarians. Kovariansleddet gir da et bidrag som øker måleusikkerheten (eller reduserer hvis de svinger i mottakt).

Kombinert standard usikkerhet ved målefunksjon på **produktform** (Spesiell form, hentet fra GUM)

Dersom målefunksjonen består av bare faktorer, kan vi regne med relative usikkerheter ($u(x)/x$), og vi kan da benytte en enklere formel for kombinasjonen:

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_n) = c X_1^{p_1} X_2^{p_2} \dots X_N^{p_N}$$



$$\left[\frac{u_c(y)}{y} \right]^2 = \sum_{i=1}^N \left[p_i \cdot \frac{u(x_i)}{x_i} \right]^2 + \underbrace{2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \left[p_i \cdot \frac{u(x_i)}{x_i} \right] \left[p_j \cdot \frac{u(x_j)}{x_j} \right] \cdot r(x_i, x_j)}_{\text{Correlation term}}$$

Dersom inngangsstørrelsene er uavhengige, er dette korrelasjonsleddet lik 0.

Kombinert standard usikkerhet ved uavhengige inngangsstørrelser

Hvis alle inngangsstørrelsen er uavhengige, kan den generelle formelen for kombinert usikkerhet forkortes slik:

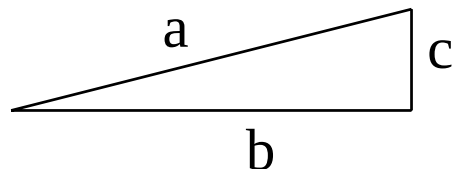
$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i)$$

Kombinert standard usikkerhet blir da:

$$u_c(y) = \sqrt{c_1^2 u^2(x_1) + c_2^2 u^2(x_2) + \dots + c_N^2 u^2(x_N)}$$

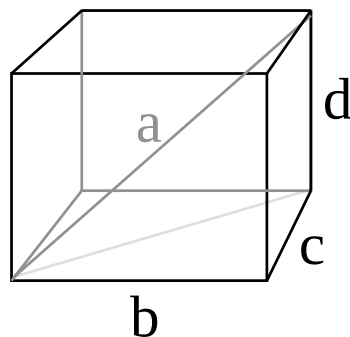
Sammenlikne med Pythagoras læresetning

2 dimensjoner



$$a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

3 dimensjoner



$$a = \sqrt{b^2 + c^2 + d^2}$$

N dimensjoner

$$\begin{aligned} u_c(y) &= \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_N^2} \\ &= \sqrt{c_1^2 u^2(x_1) + c_2^2 u^2(x_2) + \dots + c_N^2 u^2(x_N)} \end{aligned}$$

Tabell for usikkerhetsbudsjettet

Inngangs- størrelse	Verdi på inngangsstørrelsen x_i	Standard usikkerhet $u(x_i)$	Følsomhets- faktor c_i	Bidrag til komb. måleusikkerhet $u_i(y) = c_i u(x_i)$
X_1				
X_2				
”				
”				
Y	$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$			$u_c(y)$

$$u_{\text{kombinert}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2}$$

Korrelerte inngangsstørrelser

Inngangsstørrelser som svinger i takt (eller mottakt) er korrelerte. Følger de hverandre fullstendig er korrelasjonskoeffisienten lik 1 (eller -1).

- Hvis samme måleinstrument benyttes for to målinger, vil restfeil i dette instrumentet gi like feilbidrag i resultatet på begge målingene.
- Hvis to instrumenter er kalibrert mot samme referanse eller lab, vil restfeil i referansen / labens verdi slå likt ut. Med andre ord vil usikkerheten knyttet til kalibreringsverdien være sterkt korrelert (nær 1)
- Måler samme instrument på en "ny" strømning flere ganger, vil den systematiske restfeilen slå likt ut hver gang.
- Ved simultane målinger er det lett å regne ut kovariansen og korrelasjonskoeffisienten.

Kombinert standard usikkerhet ved korrelerte inngangsstørrelser

Ved å introdusere korrelasjonskoeffisienten gitt ved:

$$r(x_i, x_j) = \frac{u(x_i, x_j)}{u(x_i) \cdot u(x_j)} = \frac{\text{Cov}(x_i, x_j)}{u(x_i) \cdot u(x_j)}$$

kan uttrykket for den kombinerte standard usikkerheten skrives som:

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i) \cdot u(x_j) \cdot r(x_i, x_j)$$

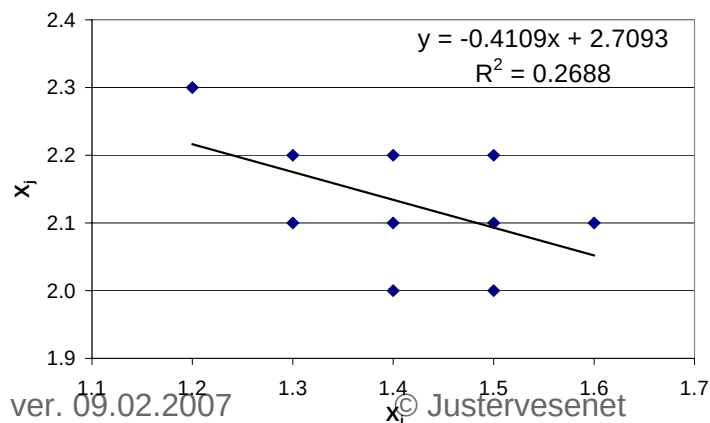
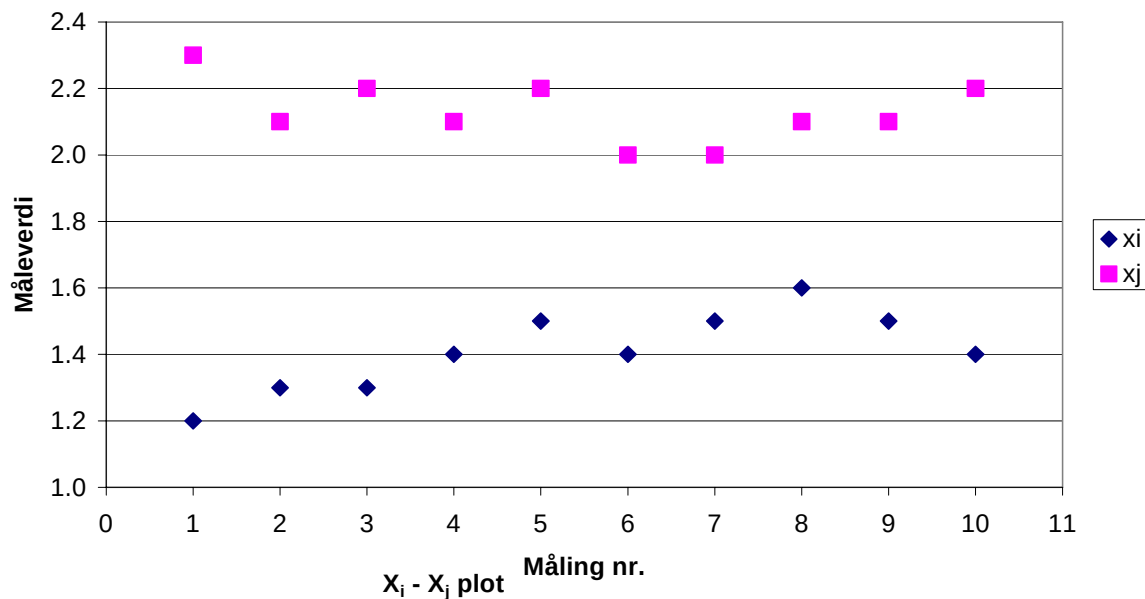
Estimatoren for $\text{Cov}(x_1, x_2)$ er gitt ved s_{x_1, x_2} :

$$s_{x_1 x_2} = \frac{1}{n - 1} \sum_{i=1}^n (x_{1i} - \bar{x}_1)(x_{2i} - \bar{x}_2)$$

Å bestemme r ved målinger, grafisk framstilling av kovarians og korrelasjon

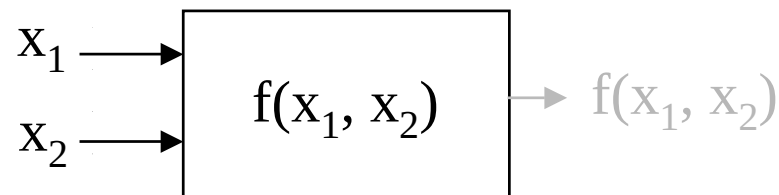
Samtidig måling av x_i og x_j

Måling nr.	x_i	x_j
1	1.2	2.3
2	1.3	2.1
3	1.3	2.2
4	1.4	2.1
5	1.5	2.2
6	1.4	2.0
7	1.5	2.0
8	1.6	2.1
9	1.5	2.1
10	1.4	2.2
Gj.snitt	1.41	2.13
stdav	0.120	0.095



Å bestemme $\text{cov}(x_i, x_j)$ og $r(x_i, x_j)$ ved måling

Måling nr.	x_1	x_2	$(x_{1,i} - \text{Gj.snitt}(x_1)) (x_{2,i} - \text{Gj.snitt}(x_2))$
1	1,2	2,3	-0,0357
2	1,3	2,1	0,0033
3	1,3	2,2	-0,0077
4	1,4	2,1	0,0003
5	1,5	2,2	0,0063
6	1,4	2,0	0,0013
7	1,5	2,0	-0,0117
8	1,6	2,1	-0,0057
9	1,5	2,1	-0,0027
10	1,4	2,2	-0,0007
Gj.snitt	1,41	2,13	-0,0059
stdav	0,120	0,095	-0,52



0,2688

r^2

$\text{cov}(x_1, x_2) =$

$$s_{x_1 x_2} = \frac{1}{n - 1} \sum_{i=1}^n (x_{1i} - \bar{x}_1)(x_{2i} - \bar{x}_2)$$

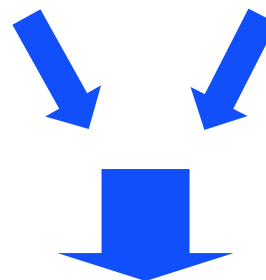
$r(x_1, x_2) =$

$$r(x_1, x_2) = \frac{u(x_1, x_2)}{u(x_1) \cdot u(x_2)} = \frac{\text{Cov}(x_1, x_2)}{u(x_1) \cdot u(x_2)}$$

Tabell for usikkerhetsbudsjett + korrelelasjonsmatrise

Inngangs- størrelse	Verdi på inngangsstørrelsen x_i	Standard usikkerhet $u(x_i)$	Følsomhets- faktor c_i	Bidrag til komb. måleusikkerhet $u_i(y) = c_i u(x_i)$
X_1				
X_2				
”				
”				
Y	$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$			$u_c(y)$

Korrelelasjons- koeffisienter, r	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1		0,52	-0,25	0,78
x_2	0,52		0,33	0,62
x_3	-0,25	0,33		0,90
x_4	0,78	0,62	0,90	



$$\begin{aligned}
 r(x_1, x_2) &= r(x_2, x_1) = 0,52 \\
 r(x_1, x_3) &= r(x_3, x_1) = -0,25 \\
 r(x_1, x_4) &= r(x_4, x_1) = 0,78 \\
 r(x_2, x_3) &= r(x_3, x_2) = 0,33 \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i) \cdot u(x_j) \cdot r(x_i, x_j)$$

Kombinasjon ved målefunksjon på summeform og ukorrelerte inngangsstørrelser

Målefunksjon som summeformel (med følsomhetsfaktorer = 1):

$$Y = X_1 + X_2 + X_3$$

Kombinert standard usikkerhet blir da:

$$u(y) = \sqrt{1^2 \cdot u^2(x_1) + 1^2 \cdot u^2(x_2) + 1^2 \cdot u^2(x_3)}$$

Kombinert **relativ** standard usikkerhet blir

$$\frac{u(y)}{y} = \frac{\sqrt{u^2(x_1) + u^2(x_2) + u^2(x_3)}}{x_1 + x_2 + x_3}$$

Eksempel på kombinert standard usikkerhet når inngangsstørrelsene er **korrelerte** (summefunksjon)

Målefunksjon: $Y = X_1 + X_2 + X_3$

Kombinert standard usikkerhet blir da (alle korrelasjonskoeffisienter er 1, dvs $r = 1$):

$$\begin{aligned} u(y) &= \sqrt{u^2(x_1) + u^2(x_2) + u^2(x_3) + 2u(x_1)u(x_2) + 2u(x_1)u(x_3) + 2u(x_2)u(x_3)} \\ &= \sqrt{[u(x_1) + u(x_2) + u(x_3)]^2} = u(x_1) + u(x_2) + u(x_3) \end{aligned}$$

Kombinert standard relativ usikkerhet blir:

$$\frac{u(y)}{y} = \frac{u(x_1) + u(x_2) + u(x_3)}{x_1 + x_2 + x_3}$$

$$\frac{u(y)}{y} = \frac{x_1 \cdot \frac{u(x_1)}{x_1} + x_2 \cdot \frac{u(x_2)}{x_2} + x_3 \cdot \frac{u(x_3)}{x_3}}{x_1 + x_2 + x_3}$$

Eksempel på kombinert standard usikkerhet når inngangsstørrelsene er **korrelerte** (produktfunksjon)

Målefunksjon:

$$Y = X_1 \cdot X_2 \cdot X_3$$

Kombinert relativ standard usikkerhet blir da:

$$\frac{u(y)}{y} = \sqrt{\left(\frac{u(x_1)}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{u(x_2)}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{u(x_3)}{x_3}\right)^2 + 2\left(\frac{u(x_1)}{x_1}\right)\left(\frac{u(x_2)}{x_2}\right) + 2\left(\frac{u(x_1)}{x_1}\right)\left(\frac{u(x_3)}{x_3}\right) + 2\left(\frac{u(x_2)}{x_2}\right)\left(\frac{u(x_3)}{x_3}\right)}$$

$$\frac{u(y)}{y} = \frac{u(x_1)}{x_1} + \frac{u(x_2)}{x_2} + \frac{u(x_3)}{x_3}$$

Eksempel på kombinasjon ved relativ utregning og **ukorrelerede** inngangsstørrelser (produktfunksjon)

Målefunksjon: $CO_2 = A \cdot EF \cdot OF$

Vi ser at vi har: $c = 1 \quad p_A = p_{EF} = p_{OF} = 1$

$$\left[\frac{u_c(y)}{y} \right]^2 = \sum_{i=1}^N \left[p_i \cdot \frac{u(x_i)}{x_i} \right]^2$$

Vi får da:

$$\frac{u(CO_2)}{CO_2} = \sqrt{\left(\frac{u(A)}{A} \right)^2 + \left(\frac{u(EF)}{EF} \right)^2 + \left(\frac{u(OF)}{OF} \right)^2}$$

Det samme resultatet får vi hvis vi bruker generell formel og **ukorrelerete** inngangsstørrelser (produktfunksjonen):

Målefunksjon: $CO_2 = A \cdot EF \cdot OF$

Kombinert standard usikkerhet blir da:

$$\begin{aligned} u(CO_2) &= \sqrt{[EF \cdot OF]^2 u^2(A) + [A \cdot OF]^2 u^2(EF) + [A \cdot EF]^2 u^2(OF)} \\ &= (A \cdot EF \cdot OF) \cdot \sqrt{\left[\frac{u(A)}{A}\right]^2 + \left[\frac{u(EF)}{EF}\right]^2 + \left[\frac{u(OF)}{OF}\right]^2} \end{aligned}$$

$$\frac{u(CO_2)}{CO_2} = \sqrt{\left[\frac{u(A)}{A}\right]^2 + \left[\frac{u(EF)}{EF}\right]^2 + \left[\frac{u(OF)}{OF}\right]^2}$$

Eksempler kombinert usikkerhet og kombinert relativ usikkerhet

Fullstendig korrelerte eller ukorrelerte (uavhengig) inngangsstørrelser
Målefunksjonen på summeform eller produktform

Målefunksjon:	Uavhengige inngangsstørrelser, dvs ingen korrelasjon mellom X_1 , X_2 og X_3	Korrelasjon = 1
Summeform: $Y = X_1 + X_2 + X_3$	$u_c(Y) = \sqrt{u^2(X_1) + u^2(X_2) + u^2(X_3)}$ $\frac{u_c(Y)}{Y} = \frac{\sqrt{u^2(X_1) + u^2(X_2) + u^2(X_3)}}{X_1 + X_2 + X_3}$	$u(Y) = u(X_1) + u(X_2) + u(X_3)$ $\frac{u(Y)}{Y} = \frac{u(X_1) + u(X_2) + u(X_3)}{X_1 + X_2 + X_3}$
Produktform: $Y = X_1 \cdot X_2 \cdot X_3$	$u(Y) = \sqrt{[X_2 \cdot X_3]^2 u^2(X_1) + [X_1 \cdot X_3]^2 u^2(X_2) + [X_1 \cdot X_2]^2 u^2(X_3)}$ $\frac{u(Y)}{Y} = \sqrt{\left(\frac{u(X_1)}{X_1}\right)^2 + \left(\frac{u(X_2)}{X_2}\right)^2 + \left(\frac{u(X_3)}{X_3}\right)^2}$	$u(Y) = X_2 X_3 u(X_1) + X_1 X_3 u(X_2) + X_1 X_2 u(X_3)$ $\frac{u(Y)}{Y} = \frac{u(X_1)}{X_1} + \frac{u(X_2)}{X_2} + \frac{u(X_3)}{X_3}$

Eksempel 1, veiing

$$Y_1 = A_1 + A_2 + A_3 + B - C$$

Når det gjøres veiinger på samme vekt, vil alle systematiske feilkilder virke på nær samme måte. Det regnes derfor at usikkerheten knyttet til disse veiingene er fullstendig korrelert.

Når det gjelder bestemmelsen av lagerbeholdning, er det usikkert hvordan systematiske og usystematiske effekter påvirke korrelasjonen. Dette kan kartlegges. Siden disse beholdningstallene har motsatt fortegn, vil den kombinerte usikkerheten ved korrelasjon bli redusert avhengig av graden av korrelasjon.

Følsomhetsfaktorer er 1 eller -1:

$$\frac{\partial Y_1}{\partial A_1} = \frac{\partial Y_1}{\partial A_2} = \frac{\partial Y_1}{\partial A_3} = \frac{\partial Y_1}{\partial B} = -\frac{\partial Y_1}{\partial C} = 1$$

Eksempel 1.1

Veiging (korrelert veiging og ukorrelert måling av lagerbeholdning)

Inngangs- størrelse	Verdi	Utvidet rel. usikkerhet	Standard usikkerhet	Følsomhets- faktor	Bidrag	Korrelasjonsmatrise				
X	x_i	$U(x_i)/x_i$	$u(x_i)$	c_i	$c_i * u(x_i)$	A1	A2	A3	B	C
A1 [tonn]	3 000	0,30 %	4,5	1	4,50		1	1	0	0
A2 [tonn]	4 000	0,30 %	6,0	1	6,00	1		1	0	0
A3 [tonn]	3 000	0,30 %	4,5	1	4,50	1	1		0	0
B [tonn]	500	5,0 %	12,5	1	12,50	0	0	0		0
C [tonn]	300	5,0 %	7,5	-1	-7,50	0	0	0	0	
Y1 [tonn]	10 200				Std. komb. usikkerhet	20,92				
				Std. komb. rel. usikkerhet [%]	0,205 %					

$$u_c(y1) = \sqrt{(u(A_1) + u(A_2) + u(A_3))^2 + (u(B) - u(C))^2}$$

Utvidet rel usikkerhet (95 % konfidens): $\frac{U(y1)}{y1} = 2 * 0,205 \% = 0,41 \%$

Eksempel 1.2

Veiging (korrelert veiging og korrelert måling av lagerbeholdning)

Inngangs- størrelse	Verdi	Utvidet rel. usikkerhet	Standard usikkerhet	Følsomhets- faktor	Bidrag	Korrelasjonsmatrise				
X	x_i	$U(x_i)/x_i$	$u(x_i)$	c_i	$c_i \cdot u(x_i)$	A1	A2	A3	B	C
A1 [tonn]	3 000	0,30 %	4,5	1	4,50		1	1	0	0
A2 [tonn]	4 000	0,30 %	6,0	1	6,00	1		1	0	0
A3 [tonn]	3 000	0,30 %	4,5	1	4,50	1	1		0	0
B [tonn]	500	5,0 %	12,5	1	12,50	0	0	0		1
C [tonn]	300	5,0 %	7,5	-1	-7,50	0	0	0	1	
Y1 [tonn]	10 200			Std. komb. usikkerhet	15,81					
				Std. komb. rel. usikkerhet [%]	0,155 %					

$$u_c(y1) = \sqrt{(u(A_1) + u(A_2) + u(A_3))^2 + (u(B) - u(C))^2}$$

Utvidet rel usikkerhet (95 % konfidens): $\frac{U(y1)}{y1} = 2 * 0,155 \% = 0,31 \%$

Eksempel 2, flow

$$Y_2 = (V1_{STD} + V2_{STD}) \cdot \bar{\rho}_{STD}$$

Det er her to gjennomstrømningsmålere som måler årlig gjennomstrømt volum ved å integrere volum momentant omregnet til standard volum. Dette må regnes om til masse ved å multiplisere med tettheten. Det er samme medium som strømmer i begge rør, slik at tettheten regnes lik for begge volum.

Målefunksjonen er forenklet, da systematiske avvik knyttet til kalibrering, drift, feil i T/P-korreksjon, strømningsprofil, variasjon i mediets sammensetning m.m. ikke er inkludert.

Det regnes ikke at noen av de dominerende usikkerheten er korrelert.

Følsomhetsfaktorer er:

$$\frac{\partial Y_2}{\partial V_1} = \frac{\partial Y_2}{\partial V_2} = \bar{\rho}_{STD} \quad \frac{\partial Y_2}{\partial \bar{\rho}_{STD}} = V1_{STD} + V2_{STD}$$

Eksempel 2.1

Flow målt i to løp (ukorrelerede volumflowmålinger)

Inngangs- størrelse	Verdi	Utvidet rel. usikkerhet	Standard usikkerhet	Følsomhets- faktor	Bidrag	Korrelasjons-matrise		
X	x_i	$U(x_i)/x_i$	$u(x_i)$	c_i	$c_i * u(x_i)$	V1	V2	ρ
V1 [m ³]	300 000	3,00 %	4 500,0	0,81	3 645		0	0
V2 [m ³]	180 000	3,00 %	2 700,0	0,81	2 187	0		0
ρ [tonn/m ³]	0,81	1,00 %	0,0	480 000	1 944	0	0	
Y2 [tonn]	388 800			Std. komb. usikkerhet	4 674			
				Std. komb. rel. usikkerhet [%]	1,2 %			

$$u_c(y2) = \sqrt{u(V_1)^2 + u(V_2)^2 + u(\rho)^2}$$

Utvidet rel usikkerhet (95 % konfidens): $\frac{U(y2)}{y2} = 2 * 1,2 \% = 2,4\%$

Eksempel 2.2

Flow målt i to løp (korrelerte volumflowmålinger)

Inngangs- størrelse	Verdi	Utvidet rel. usikkerhet	Standard usikkerhet	Følsomhets- faktor	Bidrag	Korrelasjons-matrise		
X	x_i	$U(x_i)/x_i$	$u(x_i)$	c_i	$c_i * u(x_i)$	V1	V2	ρ
V1 [m ³]	300 000	3,00 %	4 500,0	0,81	3 645		1	0
V2 [m ³]	180 000	3,00 %	2 700,0	0,81	2 187	1		0
ρ [tonn/m ³]	0,81	1,00 %	0,0	480 000	1 944	0	0	
Y2 [tonn]	388 800			Std. komb. usikkerhet	6 147			
				Std. komb. rel. usikkerhet [%]	1,6 %			

$$u_c(y2) = \sqrt{(u(V_1) + u(V_2))^2 + u(\rho)^2}$$

Utvidet rel usikkerhet (95 % konfidens): $\frac{U(y2)}{y2} = 2 * 1,6 \% = 3,2 \%$

Eksempel 3, flow

$$Y_3 = (V1_{STD} + V2_{STD} + V3_{STD} + V4_{STD} + V5_{STD}) \cdot \bar{\rho}_{STD}$$

Det er her fem gjennomstrømningsmålere som måler årlig gjennomstrømt volum ved å integrere volum momentant omregnet til standard volum. Dette må regnes om til masse ved å multiplisere med tettheten. Det er samme medium som strømmer i alle rør, slik at tettheten regnes lik for begge volum.

Målefunksjonen er forenklet, da systematiske avvik knyttet til kalibrering, drift, feil i T/P-korreksjon, strømningsprofil, variasjon i mediets sammensetning m.m. ikke er inkludert.

Det regnes ikke at noen av de dominerende usikkerheten er korrelert.

Følsomhetsfaktorer er:

$$\frac{\partial Y_3}{\partial V_1} = \frac{\partial Y_3}{\partial V_2} = \frac{\partial Y_3}{\partial V_3} = \frac{\partial Y_3}{\partial V_4} = \frac{\partial Y_3}{\partial V_5} = \bar{\rho}_{STD} \quad \frac{\partial Y_3}{\partial \bar{\rho}_{STD}} = V1_{STD} + V2_{STD} + V3_{STD} + V4_{STD} + V5_{STD}$$

Eksempel 3.1

Flow målt i fem løp (ukorrelerede volumflowmålinger)

Inngangs- størrelse	Verdi	Utvidet rel. usikkerhet	Standard usikkerhet	Følsomhets- faktor	Bidrag	Korrelasjonsmatrise					
X	x _i	U(x _i)/x _i	u(x _i)	c _i	c _i *u(x _i)	V1	V2	V3	V4	V5	ρ
V1 [m ³]	300 000	3,00 %	4 500,0	0,81	3 645		0	0	0	0	0
V2 [m ³]	180 000	3,00 %	2 700,0	0,81	2 187	0		0	0	0	0
V3 [m ³]	180 000	3,00 %	2 700,0	0,81	2 187	0	0		0	0	0
V4 [m ³]	180 000	3,00 %	2 700,0	0,81	2 187	0	0	0		0	0
V5 [m ³]	180 000	3,0 %	2 700,0	0,81	2 187	0	0	0	0		0
ρ [tonn/m ³]	0,81	1,0 %	0,0041	1 020 000	4 131	0	0	0	0	0	
Y3 [tonn]	826 200			Std. komb. usikkerhet	7 034,42						
				Std. komb. rel. usikkerhet [%]	0,851 %						

$$u_c(y3) = \sqrt{(u(V_1))^2 + (u(V_2))^2 + (u(V_3))^2 + (u(V_4))^2 + (u(V_5))^2 + (u(\rho))^2}$$

Utvidet rel usikkerhet (95 % konfidens): $\frac{U(y3)}{y3} = 2 * 0,851 \% = 1,7\%$

Eksempel 3.2

Flow målt i fem løp (korrelerte volumflowmålinger)

Inngangs- størrelse	Verdi	Utvidet rel. usikkerhet	Standard usikkerhet	Følsomhets- faktor	Bidrag	Korrelasjonsmatrise					
X	x _i	U(x _i)/x _i	u(x _i)	c _i	c _i *u(x _i)	V1	V2	V3	V4	V5	ρ
V1 [m ³]	300 000	3,00 %	4 500,0	0,81	3 645		1	1	1	1	0
V2 [m ³]	180 000	3,00 %	2 700,0	0,81	2 187	1		1	1	1	0
V3 [m ³]	180 000	3,00 %	2 700,0	0,81	2 187	1	1		1	1	0
V4 [m ³]	180 000	3,00 %	2 700,0	0,81	2 187	1	1	1		1	0
V5 [m ³]	180 000	3,0 %	2 700,0	0,81	2 187	1	1	1	1		0
ρ [tonn/m ³]	0,81	1,0 %	0,0041	1 020 000	4 131	0	0	0	0	0	
Y3 [tonn]	826 200			Std. komb. usikkerhet	13 063,37						
				Std. komb. rel. usikkerhet [%]	1,581 %						

$$u_c(y3) = \sqrt{((u(V_1) + u(V_2) + u(V_3) + u(V_4) + u(V_5))^2 + u(\rho)^2}$$

Utvidet rel usikkerhet (95 % konfidens): $\frac{U(y3)}{y3} = 2 * 1,58 \% = 3,2\%$