Innlevering 2 matematikk B for Evy Johannessen

oppgaveheftet 1.3 d)

Avgjør om tallfølgen $\{a_n\}$ konvergerer, og bestem i såfall grenseverdien til tallfølgen når a_n er gitt ved:

$a_n = \sqrt[n]{n^{-k}}$, der $k > 0$

$$\sqrt[n]{n^{-k}} = \left(n^{-k}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{-k}{n}} = \frac{-k}{n}\ln n = \lim_{n\to\infty} -k \cdot \frac{\ln n}{n} = \lim_{n\to\infty} -k \cdot \frac{\frac{1}{n}}{1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} -k \cdot \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} n^{\frac{-k}{n}} = 1$$

<u>Tallfølgen $\{a_n\}$ konvergerer mot 1</u>

Oppgave 2.5

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p}{n(n+p)} \qquad p \in \mathbb{N}$$

$$\frac{p}{n(n+p)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{(n+p)} \quad \Big| \cdot n(n+p)$$

$$p = A(n+p) + Bn$$

$$0n + p = An + Ap + Bn \Rightarrow p = Ap \Rightarrow A = 1$$

$$0 = An + Bn \Rightarrow B = -A = -1$$

$$\frac{n}{n(n+p)} = \frac{p}{n} - \frac{p}{(n+p)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n(n+p)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+p}\right)$$

$p = 1$

$$S_n = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \cdots$$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \underline{1}$$

$p = 2$

$$S_n = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) + \cdots$$

$$= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}\right) = 1\frac{1}{2}$$

$p = 3$

$$S_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}\right) + \cdots$$

$$= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+3}$$

$$\lim_{n\to sn} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+3}\right) = \underline{1\frac{5}{6}}$$

$p=n: \sum_{n=1}^{\infty} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}$

$S_n \neq 0 \Rightarrow$ rekken divergerer

Oppgave 2.12 i)

Bruk f. eks. sammenligningskriteriet til å avgjøre om de uendelige rekkene konvergerer eller divergerer. Gi grunn for svara.

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\sqrt{n^3+1}}$

$a_n = \frac{4}{\sqrt{n^3+1}}$

$b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}} \Rightarrow$ p-rekke, $p = 3$

$p > 1 \Rightarrow$ rekken konvergerer

Oppgave 2.17 d)

Bruk forholdskriteriet til å avgjøre om rekken konvergerer eller divergerer:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{10^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)^{10}}{10^{n+1}} \cdot \frac{10^n}{n^{10}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{10} \cdot 10^n}{10^n \cdot 10 \cdot n^{10}} \Bigg|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{10}}{10n^{10}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{10}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{10}}{10n^{10}} = \frac{1}{10} < 1$$

Rekken konvergerer

Oppgave 3.10 a)

Bruk forholdskriteriet til å bestemme konvergens-området til rekkene:

a) $\frac{1}{2x} + \frac{2}{(2x)^2} + \frac{3}{(2x)^3} + \cdots + \frac{n}{(2x)^n} + \cdots$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)}{(2x)^{n+1}} \cdot \frac{(2x)^n}{n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)\cdot \cancel{(2x)^n}}{\cancel{(2x)^n}\cdot 2x\cdot n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)}{2xn} = \frac{\cancel{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)}{2x\cancel{n}} = \frac{1}{2x}$$

Konvergensområde: $-\frac{1}{2} > x > \frac{1}{2}$

oppgave 4.7 a)

Bruk Maclaurinpolynomet til $f(x) = \cos x$ til å bestemme Maclaurinpolynomet til funksjonen g gitt ved

a) $g(x) = \cos 2x$, $x \in R$

$f(x) = \cos x$ $\quad f(0) = \cos 0 = 1$

$f'(x) = -\sin x$ $\quad f'(0) = -\sin 0 = 0$

$f''(x) = -\cos x$ $\quad f''(0) = -\cos 0 = -1$

$f^3(x) = \sin x$ $\quad f^3(0) = \sin 0 = 0$

$f^4(x) = \cos x$ $\quad f^4(0) = \cos 0 = 1$

$$M(f(x)) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^3(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^n(0)}{n!}n^x + \dots$$

$$M(\cos x) = 1 + \frac{0}{1!}x + \frac{-1}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{0}{5!}x^5 + \frac{-1}{6!}x^6 + \dots$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

$$M(\cos 2x) = 1 - \frac{1}{2}(2x)^2 + \frac{1}{4!}(2x)^4 - \frac{1}{6!}(2x)^6 + \dots + (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{2n}$$

Oppgave 4.19

Bestem Maclaurinrekkene til funksjonen f og g, og finn konvergensintervallet når f og g er gitt ved

$$f(x) = \ln(1+x) \quad \text{og} \quad g(x) = x\ln(1+x)$$

$f(x) = \ln(1+x)$ $\qquad$ $f(0) = \ln(1+0) = 0$

$f'(x) = \frac{1}{x+1} = (x+1)^{-1}$ $\qquad$ $f'(0) = (0+1)^{-1} = 1$

$f''(x) = -1\cdot(x+1)^{-2}$ $\qquad$ $f''(0) = -1(0+1)^{-2} = -1$

$f^3(x) = 2\cdot(x+1)^{-3}$ $\qquad$ $f^3(0) = 2(0+1)^{-3} = 2$

$f^4(x) = -6(x+1)^{-4}$ $\qquad$ $f^4(0) = -6(0+1)^{-4} = -6$

$f^5(x) = 24\cdot(x+1)^{-5}$ $\qquad$ $f^5(0) = 24(0+1)^{-5} = 24$

$$M(f(x)) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^3(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^n(0)}{n!}x^n + \dots$$

$$M(\ln(1+x)) = \underline{0 + \frac{-1}{1!}x + \frac{2}{2!}x^2 + \frac{-6}{3!}x^3 + \frac{24}{4!}x^4 + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}}$$

Rekken er alternerende, konstanten øker med en fakultet og potensen øker med en.

Konvergensintervallet:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{x}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}\cdot x\right| = |x|$$

<u>Konvergensintervall: $-1 < x < 1$</u>

for $g(x) = x\ln(1+x)$ bruker jeg Maclaurinrekka jeg fant til funksjonen f:

$M(\ln(1+x)) = 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{2}{2!}x^2 + \frac{-6}{3!}x^3 + \frac{24}{4!}x^4 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \quad | \cdot x$

og ganger den med x for å få g:

$M(x\ln(1+x)) = 0 - \frac{x^2}{1!} + \frac{2x^3}{2!} - \frac{6x^4}{3!} + \frac{24x^5}{4!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{n+1}}{n}$

Konvergensintervallet til g:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{x^{((n+1)+1)}}{(n+1)} \cdot \frac{(n+1)}{x^{(n+1)}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{(n+1)}\,x\,(n+1)}{(n+1)\,x^{(n+1)}}\right| = |x|$$

Konvergensintervallet til g = $-1 < x < 1$

Egenerklæring:

Jeg erklærer at min innleveringsoppgave som er utført i matematikk B er mitt eget arbeid.

23/3-06

Evy Johannessen