



EKSAMENSOPPGAVE MAT-2101

Eksamen i : MAT-2101 Hilbertrom

Eksamensdato : Torsdag 15. desember

Tid : 15:00 - 19:00

Sted : Åsgårdveien 9

Tillatte hjelpemidler :

- Rottmanns tabeller og to A4-ark (4 sider) med egne notater.
- Godkjent kalkulator.

Oppgavesettet er på 5 sider inkl. forside (bokmål/engelsk)

Kontaktperson under eksamen: Marius Overholt, Tlf 776 44022

Oppgave 1

Integralet

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$$

er oppgitt.

a) Verifiser at

$$d(x, y) = \left| \int_x^y e^{-u^2} du \right|$$

er en metrikk på $\mathbb{R}$.

b) Finn en Cauchy-følge i $(\mathbb{R}, d)$ som ikke konvergerer i $(\mathbb{R}, d)$. Du må påvise at følgen ikke konvergerer og at den oppfyller Cauchy-betingelsen.

Oppgave 2

Det er gitt en integraloperator

$$(Kx)(t) = \int_0^1 tsx(s)ds$$

på $L^2(0, 1)$.

a) Finn egenverdiene og egenrommene til K . Hvordan stemmer dette med teorien for kompakte operatorer?

b) Påvis at K har uniform norm $\|K\| \leq 1/3$.

Oppgave 3

a) Finn punktet nærmest $x^{-1/3}$ i underrommet

$$\mathcal{M} = \text{lin}\{1, x\}$$

av $L^2(-1, 1)$. Med avstand menes her avstand i $\|\cdots\|_2$ -normen

b) Vis at avstanden fra en vilkårlig funksjon $f \in L^2(-1, 1)$ til underrommet

$$\mathcal{P} = \text{lin}\{1, x, x^2, \dots\}$$

av polynomer, er null relativt til L^2 -normen. Gjør klart hvilke(t) resultat(er) fra pensum som du bruker til å utlede denne påstanden.

Oppgave 4

For hver $\alpha > 1/2$ definerer vi $f_\alpha \in L^2(\mathbb{T})$ som summen til Fourier-rekka

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}},$$

som konvergerer i L^2 -forstand.

a) Påvis at

$$\|f_\alpha\|_2 \rightarrow +\infty$$

når $\alpha \rightarrow (1/2)^+$.

b) Finn en kontinuerlig funksjon på $\mathbb{T}$ som ikke har svakt derivat i $L^2(\mathbb{T})$.

Oppgave 5

La K være en kompakt selv-adjungert lineæroperator på et (komplekst) uendelig-dimensjonalt, separabelt Hilbertrom og definer operatoren A ved $A = I + iK$ hvor I er identitetsoperatoren.

a) Regn ut den adjungerte A^* og nullrommet (kjernen) $\ker A$ til A .

b) Påvis at A har en fullstendig ortonormal følge av egenvektorer. Påvis også at A har en invers definert på hele $\mathcal{H}$ som en begrenset lineæroperator.

A version of the exam paper in english starts on the next page.

Problem 1

You may take the integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$$

for granted

a) Verify that

$$d(x, y) = \left| \int_x^y e^{-u^2} du \right|$$

is a metric on $\mathbb{R}$.

b) Find a Cauchy sequence in $(\mathbb{R}, d)$ that does not converge in $(\mathbb{R}, d)$. You have to show that the sequence does not converge and that it satisfies the Cauchy condition.

Problem 2

An integral operator

$$(Kx)(t) = \int_0^1 tsx(s)ds$$

is given on $L^2(0, 1)$

a) Find the eigenvalues and eigenspaces of K . Compare with the theory of compact operators.

b) Show that K has uniform norm $\|K\| \leq 1/3$

Problem 3

a) Find the point closest to $x^{-1/3}$ in the subspace

$$\mathcal{M} = \text{lin}\{1, x\}$$

of $L^2(-1, 1)$. By distance here is meant distance in the $\|\cdots\|_2$ -norm.

b) Show that the distance from an arbitrary function $f \in L^2(-1, 1)$ to the subspace

$$\mathcal{P} = \text{lin}\{1, x, x^2, \dots\}$$

of polynomials, is zero relative to the L^2 -norm. Make clear what result(s) from the syllabus that you are using to deduce this claim.

Problem 4

For each $\alpha > 1/2$ we define $f_\alpha \in L^2(\mathbb{T})$ as the sum of the Fourier series

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}},$$

which is L^2 -convergent.

a) Show that

$$\|f_\alpha\|_2 \rightarrow +\infty$$

when $\alpha \rightarrow (1/2)^+$.

b) Find a continuous function on $\mathbb{T}$ which does not have weak derivative in $L^2(\mathbb{T})$.

Problem 5

Let K be a compact self-adjoint linear operator on a (complex) infinite-dimensional, separable Hilbert space and define the operator A by $A = I + iK$ where I is the identity operator.

a) Calculate the adjoint A^* and the null space (kernel) $\ker A$ of A .

b) Show that A has a complete orthonormal sequence of eigenvectors. Also show that A has an inverse defined on the whole of $\mathcal{H}$ as a bounded linear operator.