EKSAMENSOPPGAVE

Eksamen i: STA-2001, Stokastiske prosesser

Dato : Onsdag 30. november 2005

Tid : 0900 – 1300

Stad : AudMax

Tillatte hjelpemidler:
- 4 sider handskrevne notat
- Kalkulator
- Rottmann matematisk formelsamling

Oppgavesettet er på 4 sider inkl. forside

Kontaktperson: Georg Elvebakk, 77646532

DET MATEMATISK–NATURVITENSKAPELIGE FAKULTET

Universitetet i Tromsø, N-9037 Tromsø, Telefon 77 64 40 01, Telefaks 77 64 47 65

Deloppgavene vil telle likt ved vurderinga.

Oppgave 1

Vi ser på en enkel modell for å beskrive utvekslinga av gassmolekyl mellom to adskilte legemer (urnemodellen til Ehrenfest). Vi har 2 bokser og d kuler merka $1, 2, \ldots, d$. Når prosessen starter er noen av disse kulene i boks 1 og resten i boks 2. En velger tilfeldig ut ei av de d kulene og flytter denne kula over i den andre boksen. Denne prosedyra gjentar vi så over lang tid, der utvelgingene skjer uavhengig av hverandre. La

$$\begin{aligned} X_0 &= \text{antall kuler i boks 1 før 1. trekning} \\ X_n &= \text{antall kuler i boks 1 etter trekning nr. } n, \quad n = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

a) Argumentèr for at X_n er ei Markov-kjede med tilstandsrom $S = \{0, 1, 2, \ldots, d\}$. Finn overgangssannsynlighetene for denne Markov-kjeda, dvs. P_{ij} for alle $i, j \in S$.
La nå $d = 3$ og vis at vi da får overgangsmatrise

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Definer perioden til en tilstand.
Finn perioden for Markov-kjeda når $d = 3$.
Hva blir perioden for en generell d?

Vi vil i resten av oppgaven gå ut fra at $d = 3$.
La T_i vere første tidspunkt n når $X_n = i$, dvs.

$$T_i = \min\{n \geq 0 \ : \ X_n = i\}, \quad i = 0, 1, 2, 3$$

c) Finn $E(T_2|X_0 = 3)$, $E(T_1|X_0 = 3)$ og $E(T_0|X_0 = 3)$.

d) Finn stasjonærfordelinga π_i, $i = 0, 1, 2, 3$, altså den delen av tida kjeda er i tilstand i i det lange løp.
Grunngi hva

$$\lim_{n\to\infty}\{P_{ij}^{2n+1}\} \qquad \text{og} \qquad \lim_{n\to\infty}\{P_{ij}^{2n}\}$$

blir for $i, j = 0, 1, 2, 3$.

Oppgave 2

I et datasystem opptrer det (kritiske) situasjoner som fører til feil ved ulike tidspunkt etter oppstart av systemet. Vi går ut fra at tidspunkta for disse situasjonene (feila) følger en Poisson-prosess med rate $\lambda = 0.5$ per tidsenhet. La $\{N(t), t \geq 0\}$ være antallet situasjoner ved tid t og la S_n være ventetid til situasjon nummer n.

a) Finn sannsynligheten for minst 1 situasjon i løpet av 3 tidsenheter.
Hvor mange situasjoner kan vi forvente ved tid 5 gitt at $N(2) = 1$.

Vi tenker oss nå at vi går inn i prosessen på et vilkårlig tidspunkt t_0.

b) Hva slags fordelinga har vi for tid til neste situasjon, det vil si fordelinga til $S_{N(t_0)+1} - t_0$?
Hva slags fordelinga har vi for tid siden forrige situasjon, det vil si fordelinga til
$t_0 - S_{N(t_0)}$?
Kva blir nå forventninga for $S_{N(t_0)+1} - S_{N(t_0)}$? Kan du forklare dette?

Nå har det seg slik at etter hvert som disse feila i datasystemet opptrer vil programmererene prøve å forbedre systemet slik at de kritiske situasjonene ikke skal føre til en feil. Det viser seg derfor at etter som tida går vil sannsynligheten for at en kritisk situasjon faktisk fører til en feil være gitt ved

$$P(s) = \beta s^{\beta-1}, \quad 0 < \beta \leq 1$$

der s er tid og β er en parameter som sier noe om hvor raskt systemet blir forbedra. Antallet situasjoner følger fremdeles en Poisson-prosess der raten λ frå nå av ikke reknes som kjent.

c) Forklar hvorfor vi nå får at tidspunkta for feil vil følge en ikke-homogen Poisson-prosess med intensitetsfunksjon $\lambda P(t)$.
Hva blir forventa antall feil i $(0, t)$?
Hva slags fordeling får vi for tida til første feil?

d) Gitt at vi har observert n feil i $(0, t)$ utled fordelinga for talet på feil i $(0, s)$ der $s < t$.

Oppgave 3

Vi skal her ta for oss et hus som ved tidspunkt $t = 0$ er fritt for mus. Det viser seg at det finnes en åpning i huset slik at mus kan ta seg inn. I et lite tidsintervall h vil ei mus innta huset med sannsyn $\lambda h + o(h)$. Inne i huset er det ei felle og sannsynligheten for at ei mus som er inne i huset skal gå i fella i et lite tidsintervall h er $\mu h + o(h)$. Her er $\mu, \lambda > 0$ og $o(h)$ er ledd slik at $\lim_{h\to 0} \frac{o(h)}{h} = 0$. La $X(t)$ være talet på mus i huset ved tidspunkt $t \in [0, \infty)$ og

$$P_{i,j}(t) = P\{X(s+t) = j | X(s) = i\}, \quad i, j = 0, 1, \ldots$$

a) Forklar kort hvorfor

$$\begin{aligned} P_{i,i+1}(h) &= \lambda h + o(h) && i = 0, 1, .. \\ P_{i,i-1}(h) &= i\mu h + o(h) && i = 1, 2, .. \\ P_{i,i}(h) &= 1 - (i\mu + \lambda)h + o(h) && i = 1, \ldots \\ P_{0,0}(h) &= 1 - \lambda h + o(h) \end{aligned}$$

Argumenter for at dette er en fødsels- og dødsprosess og finn parameterene λ_n og μ_n for denne.

b) Vis ved utledning hva som blir forventa tid før det er 2 mus i huset.
Gitt at det er $X(t) = k$ mus i huset, hvor lang tid vil huset i forventning være i denne tilstanden?

c) Hva blir grensesannsynlighetene for antallet mus i huset?
Hva må forholdet mellom λ og μ være for at forventa antall mus i det lange løp skal være under 3?

Noen formler som kan komme til nytte:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a+b)^n$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} = e^a$$

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k a^k = \frac{a}{(1-a)^2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$$

EKSAMENSOPPGÅVE

Eksamen i: STA-2001, Stokastiske prosessar

Dato : Onsdag 30. november 2005

Tid : 0900 – 1300

Stad : AudMax

Tillatne hjelpemiddel:
- 4 sider handskrivne notat
- Kalkulator
- Rottmann matematisk formelsamling

Oppgåvesettet er på 4 sider inkl. forside

Kontaktperson: Georg Elvebakk, 77646532

DET MATEMATISK–NATURVITENSKAPELIGE FAKULTET

Universitetet i Tromsø, N-9037 Tromsø, Telefon 77 64 40 01, Telefaks 77 64 47 65

Deloppgåvene vil telje likt ved vurderinga.

Oppgåve 1

Vi ser på ein enkel modell for å skildre utvekslinga av gassmolekyl mellom to fråskilte lekamar (urnemodellen til Ehrenfest). Vi har 2 boksar og d kuler merka $1, 2, \ldots, d$. Når prosessen startar er nokre av desse kulene i boks 1 og resten i boks 2. Ein vel tilfeldig ut ei av dei d kulene og flyttar denne kula over i den andre boksen. Denne prosedyra gjentar vi så over lang tid, der utveljingane skjer uavhengig av kvarandre. La

$$\begin{aligned} X_0 &= \text{tal på kuler i boks 1 før 1. trekning} \\ X_n &= \text{tal på kuler i boks 1 etter trekning nr. } n, \quad n = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

a) Argumentèr for at X_n er ei Markov-kjede med tilstandsrom $S = \{0, 1, 2, \ldots, d\}$. Finn overgangssannsyna for denne Markov-kjeda, dvs. P_{ij} for alle $i, j \in S$. La no $d = 3$ og vis at vi då får overgangsmatrise

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Definer perioden til ein tilstand.
Finn perioden for Markov-kjeda når $d = 3$
Kva blir perioden for ein generell d?

Vi vil i resten av oppgåva gå ut frå at $d = 3$.
La T_i vere første tidspunkt n når $X_n = i$, dvs.

$$T_i = \min\{n \geq 0 \ : \ X_n = i\}, \quad i = 0, 1, 2, 3$$

c) Finn $E(T_2|X_0 = 3)$, $E(T_1|X_0 = 3)$ og $E(T_0|X_0 = 3)$.

d) Finn stasjonærfordelinga π_i, $i = 0, 1, 2, 3$, altså den delen av tida kjeda er i tilstand i i det lange løp.
Grunngje kva

$$\lim_{n\to\infty}\{P_{ij}^{2n+1}\} \qquad \text{og} \qquad \lim_{n\to\infty}\{P_{ij}^{2n}\}$$

blir for $i, j = 0, 1, 2, 3$.

Oppgåve 2

I eit datasystem opptrer det (kritiske) situasjonar som fører til feil ved ulike tidspunkt etter oppstart av systemet. Vi går ut frå at tidspunkta for desse situasjonane (feila) følgjer ein Poisson-prosess med rate $\lambda = 0.5$ per tidseining. La $\{N(t), t \geq 0\}$ vere talet på situasjonar ved tid t og la S_n vere ventetid til situasjon nummer n.

a) Finn sannsynet for minst 1 situasjon i løpet av 3 tidseiningar.
Kor mange situasjonar kan vi forvente ved tid 5 gitt at $N(2) = 1$.

Vi tenkjer oss no at vi går inn i prosessen på eit vilkårlig tidspunkt t_0.

b) Kva slags fordelinga har vi for tid til neste situasjon, det vil seie fordelinga til $S_{N(t_0)+1} - t_0$?
Kva slags fordelinga har vi for tid sidan forrige situasjon, det vil seie fordelinga til
$t_0 - S_{N(t_0)}$?
Kva blir no forventninga for $S_{N(t_0)+1} - S_{N(t_0)}$? Kan du forklare dette?

No har det seg slik at etter kvart som desse feila i datasystemet opptrer vil programmerarane prøve å forbetre systemet slik at dei kritiske situasjonane ikkje skal føre til ein feil. Det viser seg derfor at etter som tida går vil sannsynet for at ein kritisk situasjon faktisk fører til ein feil vere gitt ved

$$P(s) = \beta s^{\beta-1}, \quad 0 < \beta \leq 1$$

der s er tid og β er ein parameter som seier noko om kor raskt systemet blir forbetra. Talet på situasjonar følgjer framleis ein Poisson-prosess der raten λ frå no av ikkje reknast som kjent.

c) Forklar kvifor vi no får at tidspunkta for feil vil følgje ein ikkje-homogen Poisson-prosess med intensitetsfunksjon $\lambda P(t)$.
Kva blir forventa tal på feil i $(0, t)$?
Kva blir fordelinga får vi for tida til første feil?

d) Gitt at vi har observert n feil i $(0, t)$ utlei fordelinga for talet på feil i $(0, s)$ der $s < t$.

Oppgåve 3

Vi skal her ta for oss eit hus som ved tidspunkt $t = 0$ er fritt for mus. Det viser seg at det finst ein opning i huset slik at mus kan ta seg inn. I eit lite tidsintervall h vil ei mus innta huset med sannsyn $\lambda h + o(h)$. Inne i huset er det ei felle og sannsynet for at ei mus som er inne i huset skal gå i fella i eit lite tidsintervall h er $\mu h + o(h)$. Her er $\mu, \lambda > 0$ og $o(h)$ er ledd slik at $\lim_{h\to 0} \frac{o(h)}{h} = 0$. La $X(t)$ vere talet på mus i huset ved tidspunkt $t \in [0, \infty)$ og

$$P_{i,j}(t) = P\{X(s+t) = j | X(s) = i\}, \quad i, j = 0, 1, ..$$

a) Forklar kort kvifor

$$\begin{aligned} P_{i,i+1}(h) &= \lambda h + o(h) && i = 0, 1, \ldots \\ P_{i,i-1}(h) &= i\mu h + o(h) && i = 1, 2, \ldots \\ P_{i,i}(h) &= 1 - (i\mu + \lambda)h + o(h) && i = 1, \ldots \\ P_{0,0}(h) &= 1 - \lambda h + o(h) \end{aligned}$$

Argumenter for at dette er ein fødsels- og dødsprosess og finn parameterane λ_n og μ_n for denne.

b) Vis ved utleiing kva som blir forventa tid før det er 2 mus i huset.
Gitt at det er $X(t) = k$ mus i huset, kor lang tid vil huset i forventning vere i denne tilstanden?

c) Kva blir grensesannsyna for talet på mus i huset?
Kva må forholdet mellom λ og μ vere for at forventa tal på mus i det lange løp skal vere under 3?

Nokre formlar som kan kome til nytte:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a+b)^n$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} = e^a$$

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k a^k = \frac{a}{(1-a)^2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$$