EKSAMENSOPPGAVE MAT-3300

Eksamen i	**:**	**MAT-3300 Algebra 2.**
Dato	**:**	**Tirsdag 06. desember 2005.**
Tid	**:**	**09.00 - 13.00.**
Sted:	**:**	
Tillatte hjelpemidler	**:**	**Godkjent kalkulator og 2 ark notater.**

Oppgavesettet er på 2 sider eks. forside, og inneholder 10 deloppgaver: 1ab, 2abcde, 3abc.

Kontaktperson: Professor Andrei Prasolov, mobil 93 67 58 32.

1 OPPGAVE

a) Finn en undergruppe av orden 21 i permutasjonsgruppen S_7;

Hint: finn en syklisk undergruppe $K = \langle a \rangle$ av orden 7 og en syklisk undergruppe $H = \langle b \rangle$ av orden 3, slik at b virker på K ved konjugasjon på følgende måte:

$$b^{-1}ab = a^2.$$

Vis at HK er den ønskede undergruppen av orden 21.

b) La G være en gruppe av orden pq der p og q er primtall, og $p < q$. Anta

$$q \bmod p \neq 1.$$

Vis at gruppen G er syklisk;

Hint: bruk Sylowteoremer til å finne to normale undergrupper $K = \langle a \rangle$ og $H = \langle b \rangle$ av orden henholdsvis p og q. Vis deretter at $ab = ba$, og at ab er den ønskelige generatoren til gruppen G.

2 OPPGAVE

La R være en kommutativ ring, og $I, J \lhd R$ idealer. Betrakt også R-moduler M og N. La $x \in M$. Vi definerer **annulatoren** $Ann(x)$ til elementet x slik:

$$Ann(x) = \{a \in R : ax = 0\}$$

a) Vis at $Ann(x)$ er et ideal i R;

b) La

$$f : M \longrightarrow N$$

være en isomorfi av R-moduler, og $x \in M$. Vis at

$$Ann(x) = Ann\,(f(x))\,;$$

c) Betrakt R/I som en R-modul. La $x \in R$. Vis at

$$Ann(1 + I) = I \text{ og } Ann(x + I) \supseteq I;$$

d) Vis at $I = J$ når $R/I \approx R/J$ som R-moduler.

Hint: velg en isomorfi $f : R/I \to R/J$ og bruk deloppgavene **b** og **c** for elementene

$$\begin{aligned} 1+I &\in R/I, \\ 1+J &\in R/J, \\ f(1+I) &\in R/J, \\ f^{-1}(1+J) &\in R/I. \end{aligned}$$

e) Gi et eksempel av slike R, I og J der $I \neq J$, men $R/I \approx R/J$ som **ringer**.

3 OPPGAVE

Betrakt matrisen

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

som en matrise enten over kroppen $\mathbb{C}$ av komplekse tall, eller over kroppen $\mathbb{R}$ av reelle tall, eller over kroppen $\mathbb{Q}$ av rasjonale tall. Regn ut den modifiserte Frobeniusformen til matrisen D:

a) over $\mathbb{Q}$;

b) over $\mathbb{R}$;

c) over $\mathbb{C}$.

Hint: polynomet $T^4 - 2$ er irredusibelt over $\mathbb{Q}$ (du behøver ikke å bevise det). Men husk at det **ikke** er irredusibelt over $\mathbb{C}$ eller $\mathbb{R}$ (faktoriser polynomet!).

LYKKE TIL!