EKSAMENSOPPGAVE MAT-2101

Eksamen i	:	**MAT-2101 Hilbertrom**
Eksamensdato	:	**Mandag 20. februar 2006**
Tid	:	**09:00 - 13:00**
Sted	:	**Aud. Max., Administrasjonsbygget**
Tillatte hjelpemidler	:	**- Rottmanns tabeller og to A4-ark (4 sider) med egne notater.** **- Godkjent kalkulator.**

Oppgavesettet er på 4 sider inkl. forside

Kontaktperson under eksamen: Marius Overholt, Tlf 776 44022

DET MATEMATISK-NATURVITENSKAPELIGE FAKULTET

Universitetet i Tromsø, N-9037 Tromsø, Telefon 77 64 40 01, Telefaks 77 64 47 65

Oppgave 1

a) Definer begrepene

(i) åpen ball $B(x_0; r)$ med senter x_0 og radius $r > 0$

(ii) åpen mengde G

(iii) lukket mengde F

i et metrisk rom (X, d).

b) Anta at F er en lukket mengde i et metrisk rom (X, d). Bevis at hvis $(x_n)_1^\infty$ er en følge inneholdt i F som konvergerer til et punkt $x_0 \in X$ så er også grensen x_0 inneholdt i F.

c) Bruk Banachs fikspunktsats til å påvise at integrallikningen

$$x(t) = 1 + \lambda \int_0^1 \frac{x(\tau)}{1 + t + \tau} d\tau$$

har en kontinuerlig løsning for alle λ med $|\lambda| < 1/\log(2)$.

Oppgave 2

Det er oppgitt at hvis $h(x) \geq 0$ er en ikkenegativ kontinuerlig funksjon på $[a, b]$, og det finnes et punkt $c \in [a, b]$ med $h(c) > 0$, så er

$$\int_a^b h(x)dx > 0 \, .$$

a) Påvis at

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|dx$$

er en norm på det lineære rommet $C([a, b])$ av kontinuerlige funksjoner $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

b) Påvis at

$$\varphi(f) = \int_a^b f(x)dx$$

er en begrenset lineær funksjonal på $(C([a, b]), \|\cdots\|_1)$. (Altså en kontinuerlig lineær avbildning fra $(C([a, b]), \|\cdots\|_1)$ inn i $(\mathbb{R}, |\cdots|)$).

c) Rommet $L^1([a,b])$ kan abstrakt defineres som kompletteringen av $C([a,b])$ i $\|\cdots\|_1$-normen. Begrunn ved BLT-teoremet eller på annen måte at den lineære funksjonalen φ fra del b) har en utvidelse til en kontinuerlig lineær funksjonal

$$\overline{\varphi} : L^1([a,b]) \to \mathbb{R} .$$

Hva kalles denne lineære funksjonalen?

Oppgave 3

Det er oppgitt at Fouriers system

$$(e_n(x))_{n=-\infty}^{\infty} \quad , \quad e_n(x) = \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}$$

er en fullstendig ortonormal følge i $L^2([-\pi,\pi])$.

a) Finn Fourierutviklingen

$$|x| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}$$

til absoluttverdifunksjonen på intervallet $[-\pi,\pi]$.

b) Gitt varmelikningen $u_t = u_{xx}$ med periodiske randkrav $u(-\pi,t) - u(\pi,t) = u_x(-\pi,t) - u_x(\pi,t) = 0$ og startverdibetingelsen $u(x,0) = f(x)$ på $t \geq 0$. Definer løsningsoperatoren $T(t)$ for hver $t > 0$ ved $(T(t)f)(x) = u(x,t)$. (Ta for gitt at problemet har unik løsning så $T(t)$ er veldefinert).
Sjekk ved utregning at hvert element $e_n(x)$ i Fouriers system er en egenfunksjon til $T(t)$ og finn den tilhørende egenverdien $\lambda_n(t)$.

c) Ethvert element $f \in L^2([-\pi,\pi])$ har en L^2-konvergent Fourierutvikling

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_n e_n(x)$$

med

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}_n|^2 < +\infty .$$

Angi en formel for $T(t)f$ uttrykt ved Fourierkoeffisientene $\hat{f}_n$ til f. Begrunn at $T(t)$ er en begrenset lineæroperator på $L^2([-\pi,\pi])$.

Settet fortsetter...

d) Finn en kjerne $k(s,t)$ i form av en uendelig rekke slik at $T(t)$ er gitt som en integraloperator

$$(T(t)f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} k(x-y,t)f(y)dy \ .$$

(Hint: Fourierkoeffisientene $\hat{f}_n$ er gitt ved integraler). Begrunn at $T(t)$ er en kompakt operator for hver $t > 0$.