EKSAMENSOPPGAVE

---

**Eksamen i: STA-2001, Stokastiske prosesser**

**Dato : Onsdag 22. februar 2006**

**Tid : 0900 - 1300**

**Stad :**

**Tillatte hjelpemidler: - 4 sider handskrevne notat**

**- Kalkulator**

**- Rottmann matematisk formelsamling**

**-**

**Oppgavesettet er på 3 sider inkl. forside**

**Kontaktperson: Georg Elvebakk, 77646532**

DET MATEMATISK-NATURVITENSKAPELIGE FAKULTET

Universitetet i Tromsø, N-9037 Tromsø, Telefon 77 64 40 01, Telefaks 77 64 47 65

Deloppgavene vil telle likt ved vurderinga.

# Oppgave 1

Hver dag går verdien av en aksje opp med sannsynlighet 0.6 og ned med sannsynlighet 0.4. Forandring i en aksjekurs en dag er uavhengig av forandring på andre dager. Vi definerer

$$N = \text{antall dager til aksjekursen for første gang går ned}$$

der $N = 1, 2, \ldots$

**a)** Vis at du ved å betinge på hva som skjer første dag får:

$$\begin{aligned} E(N) &= 0.4 \cdot 1 + 0.6 \cdot (1 + E(N)) \\ E(N^2) &= 0.4 \cdot 1 + 0.6 \cdot (E(N+1)^2) \end{aligned}$$

Bruk dette til å vise at $E(N) = 2.5$ og $Var(N) = 3.75$.

Når aksjekursen går opp er stigningen eksponensialfordelt med forventning 0.5 kroner. La

$$X_i = \text{beløpet aksjekursen går opp med dag } i$$

**b)** Hva er tolkningen av

$$Y = \sum_{i=1}^{N-1} X_i$$

Finn forventning og varians for $Y$.

# Oppgave 2

Til en ekslusiv butikk i Tromsø kommer det kunder ved ulike tidspunkt. På en vanlig dag går vi ut fra at tidspunkta for kundeankomstene følger en Poisson-prosess med rate $\lambda = 3$ per time. La $\{N(t), t \geq 0\}$ være antallet kunder ankommet ved tid $t$ og la $S_n$ være ventetid til ankomst av kunde nummer $n$.

**a)** Finn

$$P(N(1) = 2) \quad P(S_1 > 0.5) \quad P(S_1 > 1 | S_1 > 0.5) \quad E(S_{10} | N(2) = 8)$$

Det viser seg imidlertid at ikke alle dager er like. På enkelte dager ligger det et cruise-skip i havna og raten i Poisson-prosessen går opp til $\lambda = 5$ per time. På en tilfeldig dag er det 20% sannsynlighet for at et cruise-skip besøker byen.

**b)** Gitt at det har kommet 20 kunder til butikken i løpet av 5 timer, hva er sannsynligheten for at et cruise-skip besøker byen den dagen?

# Oppgave 3

En bedrift har tre maskiner trenger må stadig repareres for at de skal fungere. To reparatører tar seg av dette. Maskinene fungere uavhengig av hverandre og tida en maskin fungerer før den svikter er eksponensialfordelt med forventning 8 dager. Når en maskin svikter blir den reparert (dersom det er en ledig reparatør). Reparasjonstida er eksponensialfordelt med forventning 2 dager.
La $X(t) \in \{0, 1, 2, 3\}$ betegne antall maskiner som er i bruk

**a)** Forklar hvorfor $\{X(t),\ t \geq 0\}$ er en tidskontinuerlig Markov-prosess.
Tekn opp et skjema for denne prosessen.

**b)** Finn andelen av tida $0, 1, 2$ eller $3$ maskiner er i bruk i det lange løp.
Finn forventa antall maskiner i bruk.
Finn forventa antall reparatører i arbeid.

**c)** Finn matrisa av overgangssannsynligheter (overgangsmatrisa) for denne Markov-kjeda, altså finn

$$P_{ij}, \quad i, j = 0, 1, 2, 3$$

Forklar hvordan du kan bruke disse til å finne grensesannsynlighetene

$$\pi_j = \lim_{n \to \infty} P_{ij}^n, \quad j = 0, 1, 2, 3$$

Ville dette bli det samme som eller forskjellig fra andelene fra oppgave b)? Forklar.

# Oppgave 4

La $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ være en følge av uavhengige identisk fordelte stokastiske variable som tar ikke-negative heiltallsverdier. Punktsannsynligheten er gitt ved:

$$P(Y_n = i) = a_i \qquad 0 < a_i < 1, \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

Fra disse definerer vi nye stokastiske variable $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ som er lik minimum av $Y$-ene opp til og med nummer $n$:

$$X_n = \min\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\}$$

**a)** Vis at $X_n$ er en Markov-kjede, og finn overgangsmatrisen uttrykt ved $a_i$-ene.

**b)** Hva vil det si at en tilstand i en Markov-kjede er rekurrent/transient?
Hvilke av tilstandene til $X_n$ er rekurrente og hvilke er transiente?
Finn andel av tida som tilbringes i de ulike tilstandene i det lange løp.

La

$$T_i = \min\{n \geq 1 \ : \ X_n = 0\}$$

**c)** Vis at

$$E(T) = \frac{1}{a_0}$$

Hint: Bruk betinging.