



EKSAMENSOPPGAVE I STA-2003

Eksamen i : Sta-2003 Tidsrekker
Eksamensdato : Torsdag 8.juni 2006
Tid : Kl. 0900-1300
Sted : Aud. Max, Administrasjonsbygget
Tillatte hjelpemidler : 4 sider egne notater
Lommekalkulator
Rottmanns formelsamling

Oppgavesettet er på 5 sider inkl. forside

Kontaktperson under eksamen: Sigrunn H. Sørbye, tlf 77 64 55 04

Notasjon: I hele oppgavesettet angir $\{w_t\}$ en følge av uavhengige $N(0, \sigma_w^2)$ variable.

Oppgave 1

La tidsrekken x_t være definert ved en kausal AR(2) prosess

$$x_t = \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + w_t.$$

a) Forklar kort hva det vil si at AR(2) prosessen er kausal. Utled følgende ligninger for den gitte prosessen

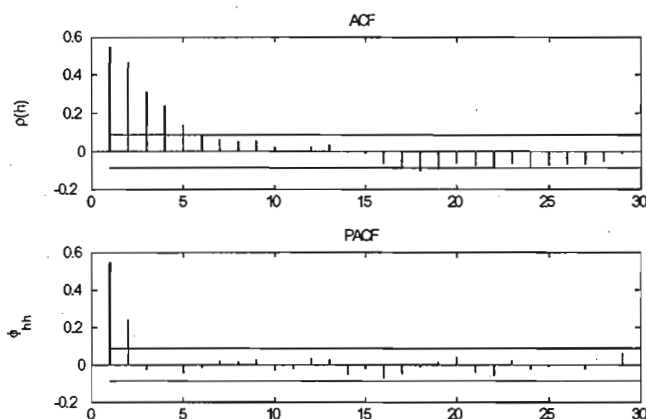
$$\gamma(0) = \phi_1 \gamma(1) + \phi_2 \gamma(2) + \sigma_w^2$$

$$\gamma(1) = \phi_1 \gamma(0) + \phi_2 \gamma(1)$$

$$\gamma(2) = \phi_1 \gamma(1) + \phi_2 \gamma(0)$$

der $\gamma(h)$, $h = 0, 1, \dots$ angir autokovariansfunksjonen til x_t . Hva kalles disse ligningene?

Basert på $n = 512$ observerte verdier av en tidsrekke x_t estimeres autokorrelasjonsfunksjonen (ACF) og den partielle autokorrelasjonsfunksjonen (PACF). Resultatet for lag $h = 1, \dots, 30$ ble som følger:



Det oppgis at de 2 første verdiene for estimert autokorrelasjonsfunksjon er $\hat{\rho}(1) = 0.55$ og $\hat{\rho}(2) = 0.47$ samt at estimert varians er gitt ved $\hat{\gamma}(0) = 1.58$.

b) Begrunn utfra plott av estimert ACF og estimert PACF hvorfor det er naturlig å modellere den gitte tidsrekken med en AR(2) prosess. Vis at momentmetoden gir følgende estimater for parametrene i modellen: $\hat{\phi}_1 \approx 0.42$, $\hat{\phi}_2 \approx 0.24$ og $\hat{\sigma}_w^2 \approx 1.04$.

Vi definerer nå prognosefunksjonen

$$f(m) = E(x_{n+m} | x_n, \dots, x_1), \quad m = 1, 2, \dots$$

- c) Finn uttrykk for ett-steps og to-steps prognosene $f(1)$ og $f(2)$. Utled deretter følgende differensligning for prognosefunksjonen:

$$f(m) - \phi_1 f(m-1) - \phi_2 f(m-2) = 0, \quad m \geq 2.$$

Vis at generell løsning av denne differensligningen er gitt ved

$$f(m) = c_1 z_1^{-m} + c_2 z_2^{-m}$$

der c_1 og c_2 angir konstanter og der $z_1 \neq z_2$ angir røttene til polynomet $\phi(z) = 1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2$.

Det oppgis at de 3 siste observasjonene for gitt tidsrekke er $x_n = -1.34$, $x_{n-1} = -1.98$, $x_{n-2} = -0.24$.

- d) Hva blir estimert ett-steps og to-steps prognose $\hat{f}(1)$ og $\hat{f}(2)$. Bestem konstantene c_1 og c_2 og finn et generelt uttrykk for estimert prognosefunksjon som funksjon av m , dvs finn $\hat{f}(m)$, $m = 2, 3, \dots$

Estimert varians til prognosefeilene kan uttrykkes ved

$$\hat{P}_{n+m}^n = \hat{\sigma}_w^2 \sum_{j=0}^{m-1} \hat{\psi}_j^2$$

der $\hat{\psi}_j$ angir estimerte koeffisienter når prosessen x_t uttrykkes på kausal form.

- e) Finn estimert varians til ett-steps og to-steps prognosefeilene, dvs. finn $\hat{P}_{n+1}^n$ og $\hat{P}_{n+2}^n$. Vis at fremgangsmåten for å finne koeffisientene $\hat{\psi}_j$ for $j = 2, 3, \dots$ er basert på å løse samme differensligning som i punkt c). (Du trenger ikke løse ligningen).

Oppgave 2

Definer tidsrekken x_t ved

$$x_t = w_t - \frac{1}{2}w_{t-2} + \frac{1}{4}w_{t-4}.$$

- a) Angi hva slags modell dette er og vis at modellen er invertibel ved å finne røttene til tilhørende karakteristiske polynom. Finn autokovariansfunksjonen til x_t og begrunn hvorfor prosessen er svak stasjonær

b) Vis at spektraltettheten til x_t er gitt ved

$$f_x(\nu) = \left(\frac{21}{16} - \frac{5}{4} \cos(4\pi\nu) + \frac{1}{2} \cos(8\pi\nu)\right) \sigma_w^2.$$

For hvilke frekvenser $\nu \in [0, 1/2]$ maksimeres spektraltettheten? Tegn en grov skisse av $f_x(\nu)$ og forklar hvilken informasjon denne gir.

Vi ønsker nå å estimere spektraltettheten utfra observerte verdier $x_1, \dots, x_n$. For et gitt frekvensbånd sentrert i $\nu_k = k/n$, $B = \{\nu; \nu_k - \frac{L}{2n} \leq \nu \leq \nu_k + \frac{L}{2n}\}$, benyttes estimatoren

$$\hat{f}(\nu) = \frac{1}{L} \sum_{l=-(L-1)/2}^{(L-1)/2} [X_c^2(\nu_k + \frac{l}{n}) + X_s^2(\nu_k + \frac{l}{n})]$$

der $\nu \approx \nu_k$. Cosinus og sinustransformen for frekvenser $\nu_j, j = 0, \dots, n-1$ er definert ved

$$X_c(\nu_j) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n x_t \cos(2\pi\nu_j t), \quad X_s(\nu_j) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n x_t \sin(2\pi\nu_j t).$$

Asymptotisk antas

$$\text{Var}(X_c(\nu_j)) = \text{Var}(X_s(\nu_j)) \approx f(\nu)/2, \quad \nu_j \in B.$$

c) Hvilken båndbredde benyttes i den gitte estimeringsmetoden? Begrunn hvorfor $2L\hat{f}(\nu_k)/f(\nu)$ er tilnærmet asymptotisk kji-kvadratfordelt med $2L$ frihetsgrader. Utled et $100(1-\alpha)\%$ konfidensintervall for spektraltettheten $f(\nu)$. Finn et 99% intervallestimat for $f(0.25)$ dersom vi har observert $\hat{f}(0.25) = 4.21$ når $L = 15$.

Oppgave 3

Et lineært filter defineres ved

$$y_t = \sum_{r=-\infty}^{\infty} a_r x_{t-r}$$

der x_t er svakt stasjonær, $\sum_{t=-\infty}^{\infty} |a_t| < \infty$ og der frekvensresponsfunksjonen

$$A(\nu) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} a_t e^{-2\pi i \nu t}.$$

Vis at krysskovariansfunksjonen $\gamma_{yx}(h)$ for det lineære filteret kan uttrykkes ved

$$\gamma_{yx}(h) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2\pi i \nu h} A(\nu) f_x(\nu) d\nu$$

og begrunn hvorfor frekvensresponsfunksjonen er gitt ved $A(\nu) = f_{yx}(\nu)/f_x(\nu)$.

χ^2 - FORDELING

$P(Z > z_{\alpha, \nu}) = \alpha$

$\alpha \backslash \nu$	.995	.990	.975	.950	.050	.025	.010	.005
1	.00	.00	.00	.00	3.84	5.02	6.63	7.88
2	.01	.02	.05	.10	5.99	7.38	9.21	10.60
3	.07	.11	.22	.35	7.81	9.35	11.34	12.84
4	.21	.30	.48	.71	9.49	11.14	13.28	14.86
5	.41	.55	.83	1.15	11.07	12.83	15.09	16.75
6	.68	.87	1.24	1.64	12.59	14.45	16.81	18.55
7	.99	1.24	1.69	2.17	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.34	1.65	2.18	2.73	15.51	17.53	20.09	21.95
9	1.73	2.09	2.70	3.33	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.16	2.56	3.25	3.94	18.31	20.48	23.21	25.19
11	2.60	3.05	3.82	4.57	19.68	21.92	24.72	26.76
12	3.07	3.57	4.40	5.23	21.03	23.34	26.22	28.30
13	3.57	4.11	5.01	5.89	22.36	24.74	27.69	29.82
14	4.07	4.66	5.63	6.57	23.68	26.12	29.14	31.32
15	4.60	5.23	6.26	7.26	25.00	27.49	30.58	32.80
16	5.14	5.81	6.91	7.96	26.30	28.85	32.00	34.27
17	5.70	6.41	7.56	8.67	27.59	30.19	33.41	35.72
18	6.26	7.01	8.23	9.39	28.87	31.53	34.81	37.16
19	6.84	7.63	8.91	10.12	30.14	32.85	36.19	38.58
20	7.43	8.26	9.59	10.85	31.41	34.17	37.57	40.00
21	8.03	8.90	10.28	11.59	32.67	35.48	38.93	41.40
22	8.64	9.54	10.98	12.34	33.92	36.78	40.29	42.80
23	9.26	10.20	11.69	13.09	35.17	38.08	41.64	44.18
24	9.89	10.86	12.40	13.85	36.42	39.36	42.98	45.56
25	10.52	11.52	13.12	14.61	37.65	40.65	44.31	46.93
26	11.16	12.20	13.84	15.38	38.89	41.92	45.64	48.29
27	11.81	12.88	14.57	16.15	40.11	43.19	46.96	49.64
28	12.46	13.56	15.31	16.93	41.34	44.46	48.28	50.99
29	13.12	14.26	16.05	17.71	42.56	45.72	49.59	52.34
30	13.79	14.95	16.79	18.49	43.77	46.98	50.89	53.67
40	20.71	22.16	24.43	26.51	55.76	59.34	63.69	66.77
50	27.99	29.71	32.36	34.76	67.50	71.42	76.15	79.49
60	35.53	37.48	40.48	43.19	79.08	83.30	88.37	91.95
70	43.28	45.44	48.76	51.74	90.53	95.02	100.42	104.21
80	51.17	53.54	57.15	60.39	101.88	106.63	112.32	116.31
90	59.20	61.75	65.65	69.13	113.14	118.13	124.11	128.29
100	67.33	70.06	74.22	77.93	124.34	129.56	135.80	140.16