EKSAMENSOPPGAVE I STA-1002

Eksamen i	:	**STA-1002 Statistikk og sannsynlighet 2**
Eksamensdato	:	**Onsdag 14. juni 2006**
Tid	:	**Kl 09:00-13:00**
Sted	:	**Aud.max.**
Tillatte hjelpemidler	:	**4 (A4) sider notater samt godkjent kalkulator**

Oppgavesettet er på 15 sider inkl. forside

Kontaktperson under eksamen: Amanuensis Elinor Ytterstad, tlf 77 64 4015

DET MATEMATISK-NATURVITENSKAPELIGE FAKULTET

Universitetet i Tromsø, N-9037 Tromsø, Telefon 77 64 40 01, Telefaks 77 64 47 65

Geometrisk fordeling: $f(x) = p(1-p)^{x-1}$, $x = 1,2,\cdots$ $E(X) = \frac{1}{p}$, $Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$

Oppgavesettet består av 3 oppgaver med totalt 10 delspørsmål.

Oppgave 1
(delspørsmål a, b og c)

Anta et tilfeldig utvalg fra geometrisk fordelt populasjon.

a) Utled sannsynlighetsmaksimeringsestimatoren for p

På et jorde er det 50 rader med planter. Enkelte av plantene er syke. Det antas at smitte ikke kan overføres fra rad til rad. La X_i være antall planter, regnet fra den ene enden av raden, til og med den første syke i rad nr i,. $i = 1,2,\cdots 50$. X_i er geometrisk fordelt med samme p i alle 50 rader dersom sykdommen ikke er smittsom (innen samme rad). For å finne ut om sykdommen er smittsom, har man registrert følgende data: I hver rad (fra den ene enden) undersøkes maksimalt to planter, dvs. kun en plante hvis den første er syk ($X_i = 1$) og to planter hvis den første er frisk ($X_i = 2$ eller $X_i \geq 3$).

Resultat av undersøkelsen ble:

x	1	2	≥ 3
Antall rader med $X_i = x$	21	4	25

b) Skriv opp likelihoodfunksjonen fra den (sensurerte) geometriske fordelingen i tabellen over, og vis at sannsynlighetsmaksimeringsestimatet for p er $\hat{p} = \frac{25}{79}$

c) Bruk estimatet fra forrige punkt og regn ut forventede antall rader med $X = 1$, $X = 2$ og $X \geq 3$ under forutsetning at sykdommer ikke er smittsom, og undersøk med en goodness-of-fit test om sykdommen er smittsom.

Oppgave 2
(delspørsmål a, b, c, d og e)

En person som har ansvar for ansettelser i et stort firma, har utviklet tre ulike egnethetstester for arbeidssøkere. Det er meningen at disse testene skal brukes til å predikere graden av dyktighet i den jobben de skal utføre.
Undersøkelsen ble gjennomført for 25 søkere som er blitt tatt inn i firmaet i en prøveperiode, og disse gjennomfører de tre testene umiddelbart i starten av perioden. Resultatet av testene benevnes x_1, x_2 og x_3. Når prøveperioden er avsluttet vurderes den enkelte med en skår for jobbdyktighet (Y). Resultatene for de 25 søkerne er gitt i en tabell nedenfor.

Målet med undersøkelsen er å finne frem til en delmengde av testene x_1, x_2 og x_3 som best predikerer Y. Det er gitt analyseresultater fra SPSS for følgende modeller:

Modell 1: $E(Y \mid x) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_{13} x_1 x_3$

Modell 2: $E(Y \mid x) = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_{13} x_1 x_3$

Modell 3: $E(Y \mid x) = \beta_1 x_1 + \beta_3 x_3 + \beta_{13} x_1 x_3$

Modell 4: $E(Y \mid x) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3$

a) Betrakt modell 1.
Skriv opp de tre regresjonsmodellene en får når x_1=80, 100 og 120, og bruk disse modellene til å forklare hva leddet $\beta_{13} x_1 x_3$ bidrar med i modellen

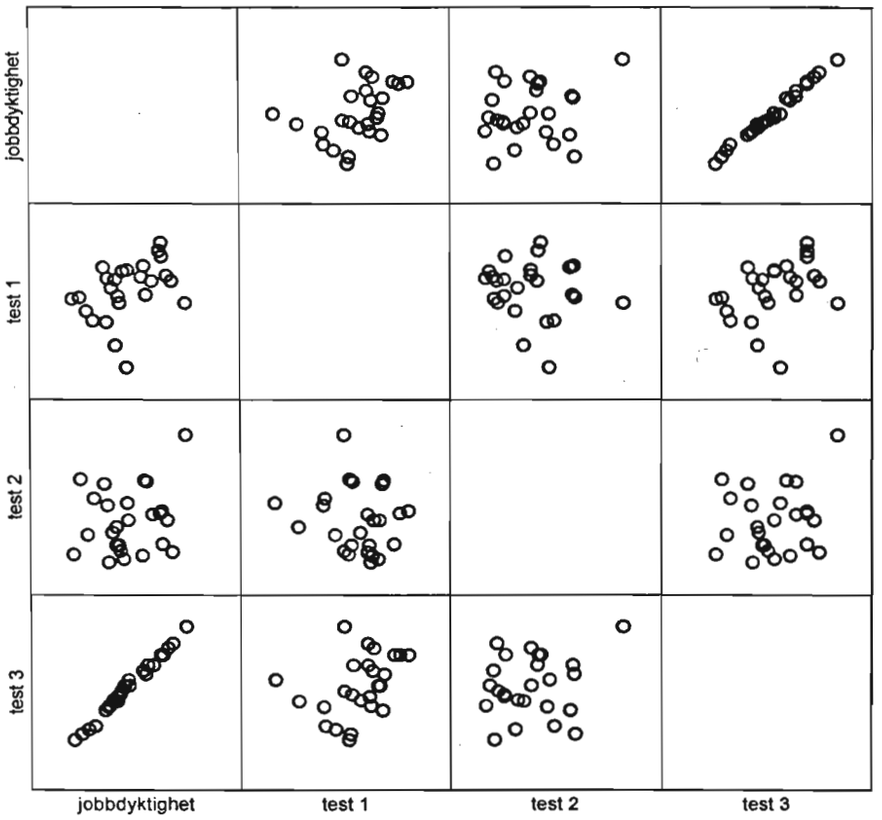
b) Bruk resultater fra SPSS-utskriftene nedenfor og skriv opp ANOVA-tabellen for modell 1.
Test hypotesen: $H_0 : \beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_{13} = 0$ på 1 % nivå.
Forklar med ord hva begge "Mean Square" i ANOVA-tabellen måler

c) Test hypotesen $H_0 : \beta_0 = \beta_2 = 0$ i modell 1 på 1 % nivå.

d) Velg den modellen du mener best predikerer jobbdyktighet. Bruk analyseresultatene fra SPSS-utskriftene nedenfor og begrunn svaret.
Skriv opp den estimerte modellen du kom frem til.

e) Betrakt modell 3.
En søker som har gjennomført egnethetstestene fikk resultatet x_1=86 og x_3=70.
Predikér skåren for jobbdyktighet, Y_0, til denne søkeren.
Regn ut et 95 % konfidensintervall for forventningsverdien til $\hat{Y}_0$. I beregningen kan du bruke at estimert $Var(\hat{Y}_0) = 2.1714$
Regn også ut estimert standardavvik til predikert jobbdyktighet for denne ene søkeren.

x_1 test 1	x_2 test 2	x_3 test 3	Y jobbdyktighet
119	100	139	213
104	78	98	115
115	105	124	183
143	108	133	202
86	119	70	65
68	94	92	110
93	87	67	52
102	70	58	23
99	175	158	251
126	135	116	167
118	69	119	162
99	73	101	118
117	63	88	94
123	100	106	134
85	113	87	92
105	134	124	171
115	72	143	223
52	115	111	132
116	78	96	110
125	132	84	86
133	79	133	203
122	66	106	124
110	89	93	102
103	136	63	38
137	106	133	198



Correlations

		jobbdyktighet	test 1	test 2	test 3
jobbdyktighet	Pearson Correlation	1	,398*	,215	,995**
	Sig. (2-tailed)		,049	,303	,000
	N	25	25	25	25
test 1	Pearson Correlation	,398*	1	-,139	,374
	Sig. (2-tailed)	,049		,509	,065
	N	25	25	25	25
test 2	Pearson Correlation	,215	-,139	1	,200
	Sig. (2-tailed)	,303	,509		,337
	N	25	25	25	25
test 3	Pearson Correlation	,995**	,374	,200	1
	Sig. (2-tailed)	,000	,065	,337	
	N	25	25	25	25

*. Correlation is significant at the 0.05 level (2-tailed).

**. Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

modell	C_p	s^2
1	5.00	21.369
2	3.00	20.351
3	4.79	23.108
4	18.88	35.513

Modell 1:

ANOVA[b]

Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	88121,669	4	22030,417	1030,974	,000[a]
	Residual	427,371	20	21,369		
	Total	88549,040	24			

a. Predictors: (Constant), x1_x3, test 2, test 1, test 3

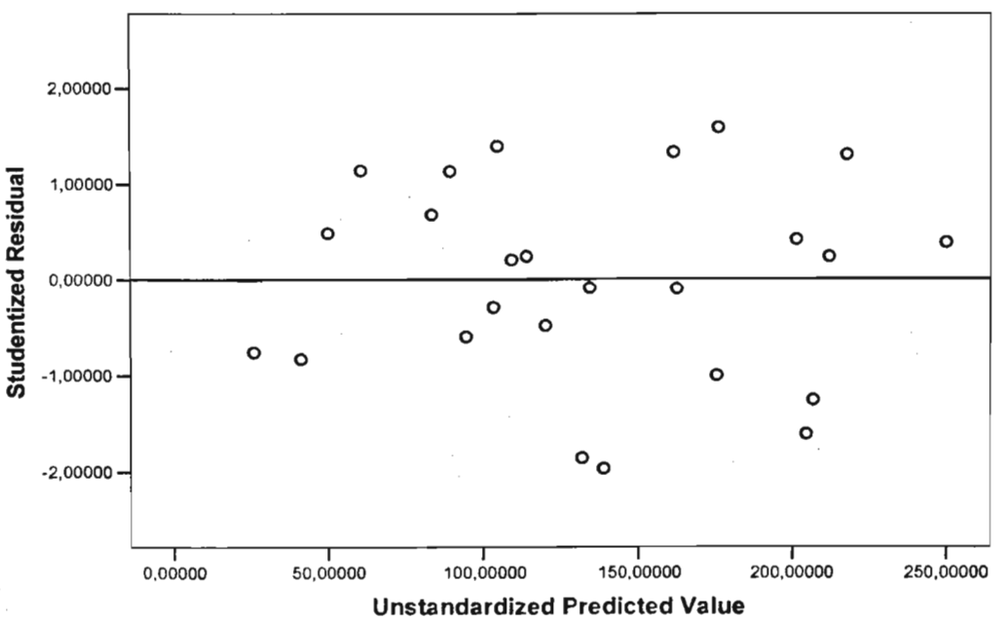
b. Dependent Variable: jobbdyktighet

Coefficients[a]

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	,205	30,219		,007	,995
	test 1	-1,034	,290	-,355	-3,569	,002
	test 2	,069	,036	,032	1,947	,066
	test 3	1,119	,282	,490	3,973	,001
	x1_x3	,010	,003	,731	3,985	,001

a. Dependent Variable: jobbdyktighet

Modell 1



Modell 2:

ANOVA[c,d]

Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression				xxxx	,000[a]
	Residual	427,372	21	20,351		
	Total		24			

a. Predictors: x1_x3, test 2, test 1, test 3

c. Dependent Variable: jobbdyktighet

d. Linear Regression through the Origin

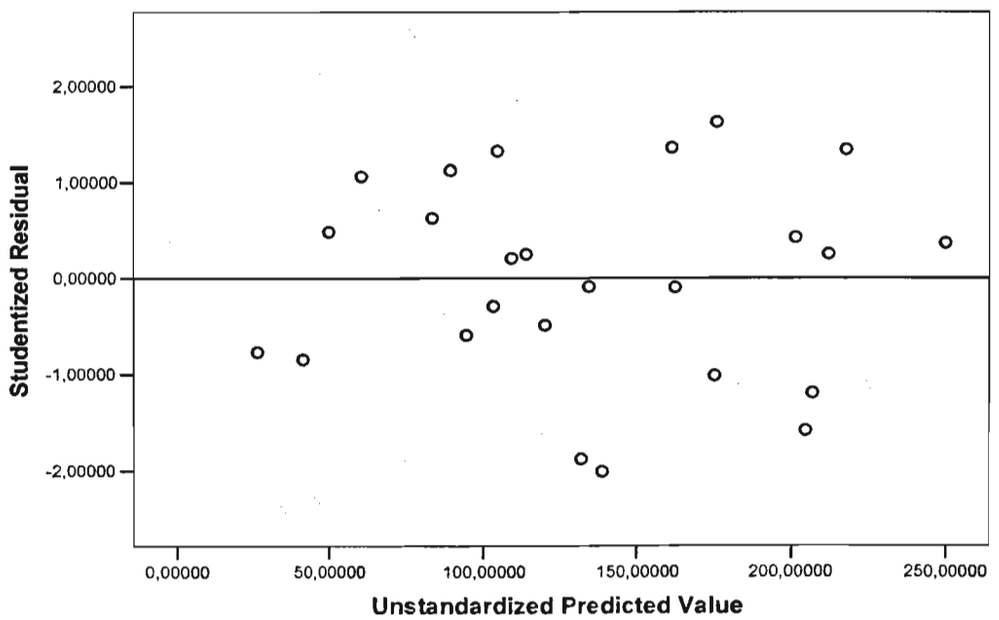
Coefficients[a,b]

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	test 1	-1,032	,044	-,775	-23,297	,000
	test 2	,069	,035	,049	1,995	,059
	test 3	1,121	,066	,829	17,084	,000
	x1_x3	,010	,001	,875	18,855	,000

a. Dependent Variable: jobbdyktighet

b. Linear Regression through the Origin

Modell 2



Modell 3:

ANOVA[c,d]

Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression				xxxxx	,000[a]
	Residual	508,385	22	23,108		
	Total		24			

a. Predictors: x1_x3, test 1, test 3

c. Dependent Variable: jobbdyktighet

d. Linear Regression through the Origin

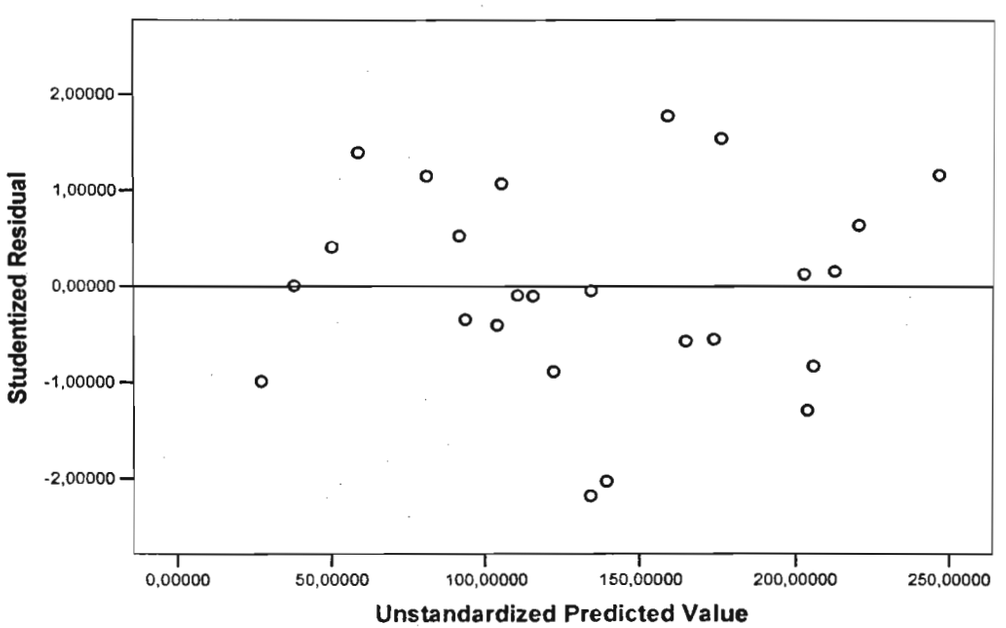
Coefficients[a,b]

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	test 1	-,987	,040	-,740	-24,390	,000
	test 3	1,209	,052	,894	23,360	,000
	x1_x3	,010	,000	,823	20,237	,000

a. Dependent Variable: jobbdyktighet

b. Linear Regression through the Origin

Modell 3



Modell 4:

ANOVA[b]

Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	87782,263	3	29260,754	801,375	,000[a]
	Residual	766,777	21	36,513		
	Total	88549,040	24			

a. Predictors: (Constant), test 3, test 2, test 1

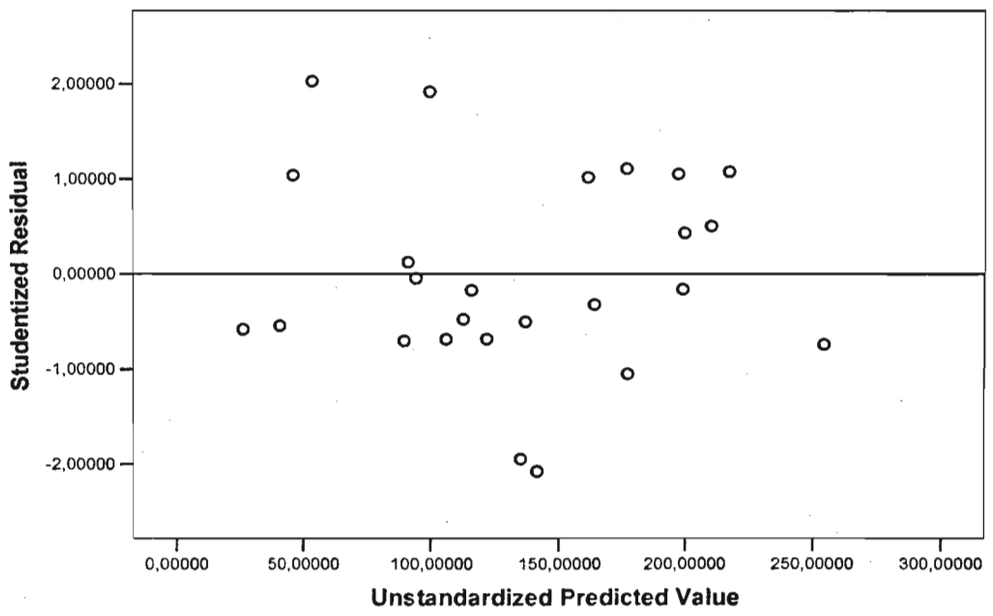
b. Dependent Variable: jobbdyktighet

Coefficients[a]

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	-117,383	8,541		-13,743	,000
	test 1	,103	,066	,035	1,569	,132
	test 2	,051	,046	,024	1,109	,280
	test 3	2,231	,052	,977	42,900	,000

a. Dependent Variable: jobbdyktighet

Modell 4



Oppgave 3
(delspørsmål a og b)

Vi skal undersøke slitestyrken til fire ulike typer dekk. 8 testbiler er med i undersøkelsen

a) Skriv opp hypotesen og test på 5 % nivå om de fire dekktypene har forskjellig slitasjestyrke.
Er dekktype og/eller bil "random" faktorer? Begrunn svaret.
Forklar hvorfor SSE=0 når vi tar med interaksjonsleddet i modellen (se SPSS-utskriften)

b) Skriv opp en regresjonsmodell for slitestyrke slik at det er mulig å teste om dekktype 2, 3 og 4 har forskjellig slitestyrke fra dekktype 1.
Kan vi si noe om SSE i denne modellen fra de opplysningen vi har i ANOVA-tabellene nedenfor?

Dekktype\	bil 1	bil 2	bil 3	bil 4	bil 5	bil 6	bil 7	bil 8
1	1,45	1,78	2,03	1,21	2,45	1,77	0,98	1,97
2	1,67	1,72	2,15	1,45	2,23	1,68	1,12	1,65
3	1,54	1,65	1,88	1,11	1,97	1,65	0,89	1,45
4	1,42	1,63	2,14	1,32	2,14	1,79	1,11	1,76

Tests of Between-Subjects Effects

Dependent Variable: dekkslitasje

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Corrected Model	4,275[a]	10	,428	31,930	,000
Intercept	86,988	1	86,988	6496,840	,000
dekktype	,194	3	,065	4,823	,010
bil	4,081	7	,583	43,547	,000
Error	,281	21	,013		
Total	91,544	32			
Corrected Total	4,556	31			

a. R Squared = ,938 (Adjusted R Squared = ,909)

Tests of Between-Subjects Effects

Dependent Variable: dekkslitasje

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Corrected Model	4,556[a]	31	,147	.	.
Intercept	86,988	1	86,988	.	.
dekktype	,194	3	,065	.	.
bil	4,081	7	,583	.	.
dekktype * bil	,281	21	,013	.	.
Error	,000	0	.		
Total	91,544	32			
Corrected Total	4,556	31			

a. R Squared = 1,000 (Adjusted R Squared = .)

t-fordeling

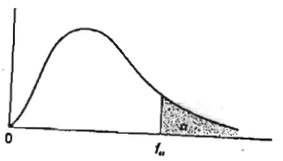


Critical Values of the t-Distribution

	α						
ν	0.40	0.30	0.20	0.15	0.10	0.05	0.025
1	0.325	0.727	1.376	1.963	3.078	6.314	12.706
2	0.289	0.617	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303
3	0.277	0.584	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182
4	0.271	0.569	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776
5	0.267	0.559	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571
6	0.265	0.553	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447
7	0.263	0.549	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365
8	0.262	0.546	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306
9	0.261	0.543	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262
10	0.260	0.542	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228
11	0.260	0.540	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201
12	0.259	0.539	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179
13	0.259	0.537	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160
14	0.258	0.537	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145
15	0.258	0.536	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131
16	0.258	0.535	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120
17	0.257	0.534	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110
18	0.257	0.534	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101
19	0.257	0.533	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093
20	0.257	0.533	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086
21	0.257	0.532	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080
22	0.256	0.532	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074
23	0.256	0.532	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069
24	0.256	0.531	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064
25	0.256	0.531	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060
26	0.256	0.531	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056
27	0.256	0.531	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052
28	0.256	0.530	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048
29	0.256	0.530	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045
30	0.256	0.530	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042
40	0.255	0.529	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021
60	0.254	0.527	0.848	1.045	1.296	1.671	2.000
120	0.254	0.526	0.845	1.041	1.289	1.658	1.980
∞	0.253	0.524	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960

Critical Values of the Chi-Squared Distribution

	α											
ν	0.995	0.99	0.98	0.975	0.95	0.90	0.80	0.20	0.10	0.05	0.025	0.02	0.01	0.005	0.001
1	0.0^4393	0.0^3157	0.0^3628	0.0^3982	0.00393	0.0158	0.0642	1.642	2.706	3.841	5.024	5.412	6.635	7.879	10.827
2	0.0100	0.0201	0.0404	0.0506	0.103	0.211	0.446	3.219	4.605	5.991	7.378	7.824	9.210	10.597	13.815
3	0.0717	0.115	0.185	0.216	0.352	0.584	1.005	4.642	6.251	7.815	9.348	9.837	11.345	12.838	16.268
4	0.207	0.297	0.429	0.484	0.711	1.064	1.649	5.989	7.779	9.488	11.143	11.668	13.277	14.860	18.465
5	0.412	0.554	0.752	0.831	1.145	1.610	2.343	7.289	9.236	11.070	12.832	13.388	15.086	16.750	20.517
6	0.676	0.872	1.134	1.237	1.635	2.204	3.070	8.558	10.645	12.592	14.449	15.033	16.812	18.548	22.457
7	0.989	1.239	1.564	1.690	2.167	2.833	3.822	9.803	12.017	14.067	16.013	16.622	18.475	20.278	24.322
8	1.344	1.646	2.032	2.180	2.733	3.490	4.594	11.030	13.362	15.507	17.535	18.168	20.090	21.955	26.125
9	1.735	2.088	2.532	2.700	3.325	4.168	5.380	12.242	14.684	16.919	19.023	19.679	21.666	23.589	27.877
10	2.156	2.558	3.059	3.247	3.940	4.865	6.179	13.442	15.987	18.307	20.483	21.161	23.209	25.188	29.588
11	2.603	3.053	3.609	3.816	4.575	5.578	6.989	14.631	17.275	19.675	21.920	22.618	24.725	26.757	31.264
12	3.074	3.571	4.178	4.404	5.226	6.304	7.807	15.812	18.549	21.026	23.337	24.054	26.217	28.300	32.909
13	3.565	4.107	4.765	5.009	5.892	7.042	8.634	16.985	19.812	22.362	24.736	25.472	27.688	29.819	34.528
14	4.075	4.660	5.368	5.629	6.571	7.790	9.467	18.151	21.064	23.685	26.119	26.873	29.141	31.319	36.123
15	4.601	5.229	5.985	6.262	7.261	8.547	10.307	19.311	22.307	24.996	27.488	28.259	30.578	32.801	37.697
16	5.142	5.812	6.614	6.908	7.962	9.312	11.152	20.465	23.542	26.296	28.845	29.633	32.000	34.267	39.252
17	5.697	6.408	7.255	7.564	8.672	10.085	12.002	21.615	24.769	27.587	30.191	30.995	33.409	35.718	40.790
18	6.265	7.015	7.906	8.231	9.390	10.865	12.857	22.760	25.989	28.869	31.526	32.346	34.805	37.156	42.312
19	6.844	7.633	8.567	8.907	10.117	11.651	13.716	23.900	27.204	30.144	32.852	33.687	36.191	38.582	43.820
20	7.434	8.260	9.237	9.591	10.851	12.443	14.578	25.038	28.412	31.410	34.170	35.020	37.566	39.997	45.315
21	8.034	8.897	9.915	10.283	11.591	13.240	15.445	26.171	29.615	32.671	35.479	36.343	38.932	41.401	46.797
22	8.643	9.542	10.600	10.982	12.338	14.041	16.314	27.301	30.813	33.924	36.781	37.659	40.289	42.796	48.268
23	9.260	10.196	11.293	11.688	13.091	14.848	17.187	28.429	32.007	35.172	38.076	38.968	41.638	44.181	49.728
24	9.886	10.856	11.992	12.401	13.848	15.659	18.062	29.553	33.196	36.415	39.364	40.270	42.980	45.558	51.179
25	10.520	11.524	12.697	13.120	14.611	16.473	18.940	30.675	34.382	37.652	40.646	41.566	44.314	46.928	52.620
26	11.160	12.198	13.409	13.844	15.379	17.292	19.820	31.795	35.563	38.885	41.923	42.856	45.642	48.290	54.052
27	11.808	12.879	14.125	14.573	16.151	18.114	20.703	32.912	36.741	40.113	43.194	44.140	46.963	49.645	55.476
28	12.461	13.565	14.847	15.308	16.928	18.939	21.588	34.027	37.916	41.337	44.461	45.419	48.278	50.993	56.893
29	13.121	14.256	15.574	16.047	17.708	19.768	22.475	35.139	39.087	42.557	45.722	46.693	49.588	52.336	58.302
30	13.787	14.953	16.306	16.791	18.493	20.599	23.364	36.250	40.256	43.773	46.979	47.962	50.892	53.672	59.703



Critical Values of the F-Distribution

$f_{0.01}(v_1, v_2)$

	v_1								
v_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	4052	4999.5	5403	5625	5764	5859	5928	5981	6022
2	98.50	99.00	99.17	99.25	99.30	99.33	99.36	99.37	99.39
3	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.35
4	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66
5	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16
6	13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98
7	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72
8	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91
9	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35
10	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78
17	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32	3.22
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18
27	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.15
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12
29	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.09
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72
120	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56
∞	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41

(continued) Critical Values of the *F*-Distribution

$f_{0.01}(v_1, v_2)$

	v_1									
v_2	**10**	**12**	**15**	**20**	**24**	**30**	**40**	**60**	**120**	**∞**
1	6056	6106	6157	6209	6235	6261	6287	6313	6339	6366
2	99.40	99.42	99.43	99.45	99.46	99.47	99.47	99.48	99.49	99.50
3	27.23	27.05	26.87	26.69	26.60	26.50	26.41	26.32	26.22	26.13
4	14.55	14.37	14.20	14.02	13.93	13.84	13.75	13.65	13.56	13.46
5	10.05	9.89	9.72	9.55	9.47	9.38	9.29	9.20	9.11	9.02
6	7.87	7.72	7.56	7.40	7.31	7.23	7.14	7.06	6.97	6.88
7	6.62	6.47	6.31	6.16	6.07	5.99	5.91	5.82	5.74	5.65
8	5.81	5.67	5.52	5.36	5.28	5.20	5.12	5.03	4.95	4.86
9	5.26	5.11	4.96	4.81	4.73	4.65	4.57	4.48	4.40	4.31
10	4.85	4.71	4.56	4.41	4.33	4.25	4.17	4.08	4.00	3.91
11	4.54	4.40	4.25	4.10	4.02	3.94	3.86	3.78	3.69	3.60
12	4.30	4.16	4.01	3.86	3.78	3.70	3.62	3.54	3.45	3.36
13	4.10	3.96	3.82	3.66	3.59	3.51	3.43	3.34	3.25	3.17
14	3.94	3.80	3.66	3.51	3.43	3.35	3.27	3.18	3.09	3.00
15	3.80	3.67	3.52	3.37	3.29	3.21	3.13	3.05	2.96	2.87
16	3.69	3.55	3.41	3.26	3.18	3.10	3.02	2.93	2.84	2.75
17	3.59	3.46	3.31	3.16	3.08	3.00	2.92	2.83	2.75	2.65
18	3.51	3.37	3.23	3.08	3.00	2.92	2.84	2.75	2.66	2.57
19	3.43	3.30	3.15	3.00	2.92	2.84	2.76	2.67	2.58	2.49
20	3.37	3.23	3.09	2.94	2.86	2.78	2.69	2.61	2.52	2.42
21	3.31	3.17	3.03	2.88	2.80	2.72	2.64	2.55	2.46	2.36
22	3.26	3.12	2.98	2.83	2.75	2.67	2.58	2.50	2.40	2.31
23	3.21	3.07	2.93	2.78	2.70	2.62	2.54	2.45	2.35	2.26
24	3.17	3.03	2.89	2.74	2.66	2.58	2.49	2.40	2.31	2.21
25	3.13	2.99	2.85	2.70	2.62	2.54	2.45	2.36	2.27	2.17
26	3.09	2.96	2.81	2.66	2.58	2.50	2.42	2.33	2.23	2.13
27	3.06	2.93	2.78	2.63	2.55	2.47	2.38	2.29	2.20	2.10
28	3.03	2.90	2.75	2.60	2.52	2.44	2.35	2.26	2.17	2.06
29	3.00	2.87	2.73	2.57	2.49	2.41	2.33	2.23	2.14	2.03
30	2.98	2.84	2.70	2.55	2.47	2.39	2.30	2.21	2.11	2.01
40	2.80	2.66	2.52	2.37	2.29	2.20	2.11	2.02	1.92	1.80
60	2.63	2.50	2.35	2.20	2.12	2.03	1.94	1.84	1.73	1.60
120	2.47	2.34	2.19	2.03	1.95	1.86	1.76	1.66	1.53	1.38
∞	2.32	2.18	2.04	1.88	1.79	1.70	1.59	1.47	1.32	1.00