| | | |
|---|---|---|
| **Eksamen i** | : | **MAT-2201 Numerisk beregning** |
| **Eksamensdato** | : | **24. mai 2006** |
| **Tid** | : | **0900 – 1300** |
| **Hjelpemidler** | : | **Rottmanns tabeller; 2 A4-ark med notater beskrevne på begge sider; godkjent kalkulator.** |
| **Permitted aids:** | : | **Rottmanns tables, 2 A4 sheets with notes written on both sides; acknowledged calculator.** |

**Oppgavesettet er på 7 sider inkl. forside. Side 2-4 inneholder norsk versjon.**

**Pages 5-7 contain english version.**

**Kontaktperson under eksamen: Einar Mjølhus, tlf 776 44013**



DET MATEMATISK-NATURVITENSKAPELIGE FAKULTET

Universitetet i Tromsø, N-9037 Tromsø, Telefon 77 64 40 01, Telefaks 77 64 47 65

## Oppgave 1

a) For hvilke positive verdier av $a$ har ligningen

$$x - a\sin x = 0$$

minst en løsning $x$ som oppfyller $x>0$. Svaret skal kort grunngis.

b) Angi en algoritme for å bestemme den minste av slike løsninger ved biseksjonsmetoden. Beskrivelsen skal inkludere valg av startverdier for algoritmen, og dette valget skal kort begrunnes.

c) Hvor mange iterasjoner trengs for å bestemme løsningen med 8 sikre desimaler?

## Oppgave 2

a) Ligningssystemet

(2.1) $Ax = b$

er gitt, der $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ antas å være inverterbar og $x, b \in \mathbf{R}^n$. En løsningsprosedyre for (2.1) vil i praksis bare gi en tilnærmet løsning $x^{(0)}$, for eksempel grunnet avrundingsfeil. Beskriv en algoritme for iterativ forbedring av løsningen.

b) Vi antar at den aktuelle løsningsprosedyre kan representeres ved en matrise $B$ som er uavhengig av vektoren $b$, slik at

$$x^{(0)} = Bb$$

der B er en approksimasjon til $A^{-1}$, slik at $\| I - BA \| < 1$. Beskriv en iterasjon, som kan være den allerede beskrevet under a), som konvergerer mot løsningen til (2.1). Konvergens skal bevises.



DET MATEMATISK-NATURVITENSKAPELIGE FAKULTET

Universitetet i Tromsø, N-9037 Tromsø, Telefon 77 64 40 01, Telefaks 77 64 47 65

## Oppgave 3

a) La $\{a_1,...,a_n\}$ betegne et lineært uavhengig system av vektorer i $\mathbf{C}^m$, der $m \geq n$. Vis at Gram – Schmidt systemet $\{q_1,...,q_n\}$ definert ved:

(3.1) $$\phi_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} < a_k, q_i > q_i$$

(3.2) $$q_k = \frac{\phi_k}{\| \phi_k \|},$$

danner et ortonormalt system. Her er $< u, v >$ standard hermitisk indreprodukt i $\mathbf{C}^m$.

b) La $A \in \mathbf{C}^{m \times n}$ der $m \geq n$, og anta at kolonnevektorene til $A$ er lineært uavhengige. Vis at vi kan finne matriser $Q \in \mathbf{C}^{m \times n}$, $R \in \mathbf{C}^{n \times n}$, der kolonnene i $Q$ er ortonormale og $R$ er en øvre triangulær matrise, slik at

(3.3) $$A=QR.$$

c) Vi betrakter ligningssystemet

(3.4) $$Ax=b$$

hvor $A$ er som før, $b \in \mathbf{C}^m$ og $x \in \mathbf{C}^n$, og vi ønsker å finne $x$ slik at $\| Ax - b \|_2$ blir minst mulig. Vis at løsningen finnes ved å løse

(3.5) $$Rx = Q^* b$$

hvor $R$ og $Q$ er som i b).

## Oppgave 4

En industriell matematiker (la oss kalle henne Marit) har skrevet et beregningsprogram hvor hun beregner verdiene av en reell funksjon $f$ som hun vet er deriverbar til alle ordener. Hun må regne ut $f(x_j)$ i punkter $x_j$, hvor $x_j = x_0 + jh$, $j = 0,...,N$. Vi betegner de faste endepunktene $x_0 = a$ og $x_N = b$. Hun er opptatt av å kunne velge verdi av $h$ (gjennom valg av N) som er



DET MATEMATISK-NATURVITENSKAPELIGE FAKULTET

Universitetet i Tromsø, N-9037 Tromsø, Telefon 77 64 40 01, Telefaks 77 64 47 65

høvelig for den ønskede nøyaktighet i de videre beregninger.

a) Marit har bruk for den deriverte av $f$ i beregningspunktene. Hun ønsker en framgangsmåte hvor hun beregner $v_j$ slik at

$$v_j = f'(x_j) + e_j \qquad |e_j| \leq Ah^2 \tag{4.1}$$

hvor A er uavhengig av h og j. Beskriv hvordan hun kan gjøre denne beregningen for $j = 1,\ldots,N-1$ ut fra de beregnede verdier av $f$. Svaret skal begrunnes, inklusive utledning av et best mulig feilestimat som i (4.1). For enkelhets skyld kan det sees bort fra feil i de beregnede verdier av $f$.

b) Hun ønsker også å beregne tilnærminger til $f'$ i endepunktene som oppfyller samme type feilestimat når det gjelder avhengighet av $h$. Beskriv hvordan dette kan gjøres ved interpolasjon, ut fra de beregnede verdier av $v_j$. Utled også i dette tilfellet et så nøyaktig som mulig estimat av feilen.



DET MATEMATISK-NATURVITENSKAPELIGE FAKULTET

Universitetet i Tromsø, N-9037 Tromsø, Telefon 77 64 40 01, Telefaks 77 64 47 65

## MAT-2201 numerical computation

## Exam problem set spring 2006 in English language

### Problem 1

a) For which positive values of $a$ does the equation

$$x - a\sin x = 0$$

have at least one solution $x$ which satisfies $x>0$. Give briefly reasons for your answer.

b) Give an algorithm for determining the smallest of such solutions by the bisection method. The answer should include the choice of initial data for the algorithm, and there should briefly be given reasons for this choice.

c) How many iterations are needed for securing at least 8 certain decimal digits?

### Problem 2

a) The set of linear equations

(2.1) $$Ax = b$$

is given, where $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ is assumed to be invertible, and $x, b \in \mathbf{R}^n$. A solution procedure for (2.1) will in practice only give an approximate solution $x^{(0)}$, for example due to round off errors. Describe a procedure for iterative refinement of the solution.

b) We assume that the actual solution procedure can be represented by a matrix $B$ which is independent of the vector $b$, such that

$$x^{(0)} = Bb$$

where B is an approximation to $A^{-1}$, such that $\| I - BA \| < 1$. Describe an iteration, which might be the one already described under a), which converges to the solution to (2.1). The convergence



DET MATEMATISK-NATURVITENSKAPELIGE FAKULTET

Universitetet i Tromsø, N-9037 Tromsø, Telefon 77 64 40 01, Telefaks 77 64 47 65

is to be proved.

## Problem 3

a) Let $\{a_1,...,a_n\}$ denote a linearly independent system of vectors in $\mathbf{C}^m$, where $m \geq n$. Show that the Gram – Schmidt system $\{q_1,...,q_n\}$ defined by:

(3.1) $$\phi_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} < a_k, q_i > q_i$$

(3.2) $$q_k = \frac{\phi_k}{\| \phi_k \|},$$

form an orthonormal system. Here, $< u, v >$ is the standard hermitian inner product in $\mathbf{C}^m$.

b) Let $A \in \mathbf{C}^{m \times n}$ with $m \geq n$, and assume that the column vectors of $A$ are linearly independent. Show that we can compute matrices $Q \in \mathbf{C}^{m \times n}$, $R \in \mathbf{C}^{n \times n}$, where the columns of $Q$ are orthonormal and $R$ is an upper triangular matrix, such that

(3.3) $$A=QR.$$

c) Consider the set of equations

(3.4) $$Ax=b$$

where $A$ is as before, $b \in \mathbf{C}^m$ and $x \in \mathbf{C}^n$, and we wish to find $x$ such that $\| Ax - b \|_2$ is least possible. Show that the solution is found by solving

(3.5) $$Rx = Q^* b$$

where $R$ and $Q$ are as in b).

## Problem 4

An industrial mathematician (let us call her Marit) has written a computational procedure where



DET MATEMATISK-NATURVITENSKAPELIGE FAKULTET

Universitetet i Tromsø, N-9037 Tromsø, Telefon 77 64 40 01, Telefaks 77 64 47 65

she computes the values of a real-valued function $f$ which she knows is differentiable in all orders. She has to compute $f(x_j)$ at points $x_j$ , where $x_j = x_0 + jh, j = 0,...,N$ . We denote the fixed end points by $x_0 = a$ og $x_N = b$ . She is concerned with being able to choose a value of $h$ (through the choice of N) which is appropriate for the desired accuracy of the further computation.

a) Marit needs the values of the derivative of $f$ at the points of computation. She wishes a procedure where she computes $v_j$ such that

$$f'(x_j) = v_j + e_j \qquad |e_j| \leq Ah^2 \tag{4.1}$$

where A is independent of h and j. Describe how she can do this for $j = 1,...,N-1$ using the computed values of $f$. A sufficient description of the reasoning behind the answer is to be given, including a derivation of a best possible error estimate of the form of that in (4.1). For simplicity, it can be assumed that the computed values of $f$ contain no errors.

b) She also wishes to compute approximate values of $f'$ at the end points which obey the same kind of error estimate with respect to dependence of $h$. Describe how this can be done by interpolation, using the already computed values $v_j$ . Derive also in this case a best possible error estimate.



DET MATEMATISK-NATURVITENSKAPELIGE FAKULTET

Universitetet i Tromsø, N-9037 Tromsø, Telefon 77 64 40 01, Telefaks 77 64 47 65