Eksamen i	:	**MAT-2200 - Differensialligninger**
Eksamensdato	:	**7. juni 2006**
Tid	:	**0900 - 1300**
Hjelpemidler	:	**Rottmanns tabeller; 2 A4-ark med håndskrevne notater på begge sider; godkjent kalkulator.**

Oppgavesettet er på 3 sider inkl. forside

Kontaktperson under eksamen: Einar Mjølhus, tlf. 776 44013.

DET MATEMATISK-NATURVITENSKAPELIGE FAKULTET

Universitetet i Tromsø, N-9037 Tromsø, Telefon 77 64 40 01, Telefaks 77 64 47 65

Oppgave 1

I denne oppgaven betegner a og b to vilkårlige reelle tall.

a) Løs startverdiproblemet $x(0)=1,\ \ y(0)=1$ for differensialligningssystemet

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ax+by \\ \frac{dy}{dt} &= -bx+ay\end{aligned} \tag{1.1}$$

b) Finn e^{At} når

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{bmatrix} \tag{1.2}$$

c) Løs differensialligningen

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-bx+ay}{ax+by} \tag{1.3}$$

d) Skisser faseportrettet til (1.1) for forskjellige verdier av a og b, som viser de forskjellige tilfeller som kan forekomme, enten ut fra resultatet under c) eller ut fra annen innsikt. Avgjør for hvilke verdier av a og b origo er et stabilt likevektspunkt.

Oppgave 2

Differensialligningen

(2.1) $$\frac{d^2y}{dx^2} + k^2 y = f(x)$$

er gitt, der k er et vilkårlig reelt tall og $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ er en kontinuerlig funksjon.

a) Finn den generelle løsningen til (2.1) når $f(x) = \sin 2x$ og $|k| \neq 2$.

b) Finn den generelle løsningen til (2.1) når $k = 2$.

c) La så f være vilkårlig. Løs startverdiproblemet $y(0) = 0$, $\frac{dy}{dx}(0) = 0$. Løsningen kan uttrykkes ved hjelp av integraler som involverer f.

Oppgave 3

a) La $f(s) = s(\pi - s)$. La $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ være definert ved at (i) $F(s) = f(s)$ for $0 \leq s \leq \pi$, (ii) F er 2π -periodisk, og (iii) F er odde. Skisser grafen til F for $-2\pi < s < 2\pi$. Hvor mange ganger kan F deriveres slik at $F^{(n)}$ blir en stykkevis glatt funksjon?

b) Finn fouriér-rekka til F.

c) En elastisk streng er fastspent i punktene $x = 0$ og $x = L$, der $L>0$. Det antas at utslaget $u(t,x)$, der t betegner tiden, adlyder differensialligningen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Finn $u(t,x)$ for $0 \leq x \leq L$ og $t \geq 0$ når

$$u(0,x) = u_0(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 0$$

der

$$u_0(x) = x(L-x), \; x \in [0,L].$$