EKSAMENSOPPGAVE MAT-2100

Eksamen i	:	**MAT-2100 Kompleks analyse**
Eksamensdato	:	**Fredag 9. juni**
Tid	:	**09:00 - 13:00**
Sted	:	**Aasgaardveien 9**
Tillatte hjelpemidler	:	**- Rottmanns tabeller og to A4-ark (4 sider) med egne notater.** **- Godkjent kalkulator.**

Oppgavesettet er paa 3 sider inkl. forside

Kontaktperson under eksamen: Marius Overholt, Tlf. 77644022

DET MATEMATISK-NATURVITENSKAPELIGE FAKULTET

Universitetet i Troms¿, N-9037 Troms¿, Telefon 77 64 40 01, Telefaks 77 64 47 65

Oppgave 1

a) Gjengi de fire viktigste egenskapene til eksponensialfunksjonen $\exp(z)$ som funksjon i det komplekse planet.

b) Hvor er funksjonen

$$f(z) = \frac{1}{1 + i\tan(z)}$$

definert i det komplekse planet? Finn et uttrykk for $f(z)$ ved den komplekse eksponensialfunksjonen. Hva slags singulariteter har $f(z)$?

Oppgave 2

a) Finn de tre første leddene i potensrekkeutviklingen til

$$f(z) = \frac{1}{2 + iz + z^2}$$

med senter i $z = 0$. Bestem konvergensradien.

b) Finn hele potensrekkutviklingen til

$$g(z) = e^z \cos(z)$$

med senter i $z = 0$.

c) Differensiallikningen

$$zw''(z) + \frac{1}{2}w'(z) + w(z) = 0$$

har en potensrekkeløsning $w_0(z)$ med senter i $z = 0$ som oppfyller $w_0(0) = 1$. Finn de tre første leddene i denne potensrekkeløsningen.

d) Finn eventuelle singulariteter i det komplekse planet til differensiallikningen i del c) og klassifiser som regulær/irregulær. Avgjør hvilke av løsningene til differensiallikningen som er hele funksjoner.

Oppgave 3

a) Finn Laplacetransformen $F_0(z)$ til funksjonen

$$f_0(t) = \frac{1}{4}t + \frac{3}{8}\sin(2t) .$$

Regn ut Laplacetransformen $Y(z)$ til løsningen $y(t)$ til differensiallikningen

$$y''(t) + y(t) = f_0(t)$$

med startverdibetingelsene $y(0) = y'(0) = 0$.

b) Finn løsningen $y(t)$ til startverdiproblemet i del a).

Oppgave 4 (teller som to delspørsmål)

Regn ut prinsipalverdiintegralet

$$PV \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin(bx)}{a^2 - x^2} dx$$

ved residyeregning. Her er $a, b > 0$ positive reelle konstanter.

LYKKE TIL!