EKSAMENSOPPGAVE MAT-1004

(BOKMÅL)

Eksamen i	**:**	**Mat-1004 Lineær algebra.**
Dato	**:**	**Torsdag 15. juni.**
Tid	**:**	**09.00 - 13.00.**
Sted:	**:**	**Åsgårdveien 9.**
Tillatte hjelpemidler	**:**	**Godkjent kalkulator,**
		to A4 ark egne notater og
		Rottmanns tabeller.

Oppgavesettet er på 3 sider eks. forside, og inneholder 10 deloppgaver: 1ab, 2abcd, 3abcd.

Kontaktperson: Professor Andrei Prasolov, mobil 93 67 58 32.

Begrunn svarene dine, vis fremgangsmåte ved oppgaveløsningen tydelig!

1 OPPGAVE

Betrakt følgende vektorer i $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= (-1, 2, 3); \\ \mathbf{v} &= (1, -2, 3); \\ \mathbf{w} &= (1, 1, 1). \end{aligned}$$

La

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$$

være en ukjent vektor.

a) Finn en betingelse for $\mathbf{x}$ for at vektorlikningen

$$(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{x}$$

har minst én løsning (a, b), $a, b \in \mathbb{R}$.
"$\times$" betyr kryssproduktet. Betingelsen skal gis på formen

$$\begin{aligned} k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3 &= m, \\ k_1, k_2, k_3, m &\in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

b) Finn alle par (a, b) som tilfredsstiller likningen

$$(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (9, -18, 9).$$

2 OPPGAVE

a) La f være polynomet

$$f(x) = x^{10} - x^9 - 2x^8 + x + 2.$$

Betrakt en vilkårlig $n \times n$ matrise B. Gjør rede for hvordan matrisen $f(B)$ defineres.

La P være en inverterbar $n \times n$ matrise. Bevis, ved å bruke egenskapene til matriseoperasjoner, at

$$f\left(PBP^{-1}\right) = Pf(B)P^{-1}.$$

b) La

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -3 \\ 3 & -4 & -3 \\ -3 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Vis at $\lambda = -1$ er en egenverdi til A. Finn deretter alle egenverdiene til A.

For enhver egenverdi λ finn dimensjonen og en basis til egenrommet $E(\lambda)$.

c) Gjør rede for hva **rangen** til en matrise er. La $r(s)$ være rangen til matrisen $A - sI$:

$$r(s) = rank\,(A - sI)\,,$$

der s er et reelt tall (ikke nødvendigvis en egenverdi!) og I er identitetsmatrisen. Undersøk for hvilke s er

(i) $r(s) = 3$;
(ii) $r(s) = 2$;
(iii) $r(s) = 1$;
(iv) $r(s) = 0$.

d) Finn en inverterbar matrise P og en diagonalmatrise D slik at

$$P^{-1}AP = D.$$

Beregn deretter $f(A)$ der f er polynomet fra deloppgave **a)**.

3 OPPGAVE

La P_2 være vektorrommet av polynomer av grad ≤ 2, og β være standardbasisen til P_2:

$$\beta = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} = \left\{1, x, x^2\right\}.$$

a) Vis at mengden

$$\gamma = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\} = \left\{1, 1+x, 1+x+x^2\right\}$$

danner en basis til P_2, og finn overgangsmatrisen Q fra basisen γ til basisen β. Finn deretter overgangsmatrisen R fra basisen β til basisen γ.

b) La

$$\mathbf{u} = 3x + 4x^2 \in P_2.$$

Finn koordinatkolonnene $[\mathbf{u}]_\beta$ og $[\mathbf{u}]_\gamma$ til $\mathbf{u}$ med hensyn til basisene β og γ.

La

$$T : P_2 \longrightarrow P_2$$

være følgende operator:

$$T\left(f(x)\right) = f(1-x) - f(x),$$

for eksempel

$$\begin{aligned} T(-1+3x+4x^2) &= \left(-1+3(1-x)+4(1-x)^2\right) - (-1+3x+4x^2) = \\ &= \left(4x^2 - 11x + 6\right) - (-1+3x+4x^2) = 7 - 14x. \end{aligned}$$

T er en **lineær** operator (du behøver ikke å bevise dette).

c) Finn matrisen $[T]_\gamma$ til operatoren T med hensyn til basisen γ (**Merk**: γ, ikke β!).

d) Finn dimensjonen og en basis til bildet $\mathrm{Im}(T)$ til operatoren T (i boken kalles bildet til T "*the range of the operator* T" og betegnes $R(T)$).

LYKKE TIL!