Universitetet i Tromsø

Det Matematisk Naturvitenskapelige Fakultet
Institut for Matematikk og Statistikk

Eksamen i:	MAT-1002, Kalkulus-2
Eksamenstid:	Tirsdag, 6. Juni, 2006. Kl. 14.00-18.00
Eksamenssted:	Åsgårdveien 9
Hjelpemidler:	Kalkulator, formelsamling og 4 håndskrevene A4-ark med egne notater (kan skrives på begge sider)
Oppgavesettet:	Totalt på 2 sider
Kontaktperson:	Professor *Boris Kruglikov*, tlf. 776 44 779
Bemerkning:	Besvarelsen må inneholde alle mellomregninger man trenger for å komme fram til svaret

Oppgave I

1. Avgjør konvergens eller divergens av følgende rekker:

$$i.\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n+(-1)^n} \qquad ii.\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{3n+(-1)^n} \qquad iii.\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^{-n}}{n+(-1)^n}.$$

   Hvilke rekker ovenfor tillater forandring fra $\sum_{n=2}^{\infty}$ til $\sum_{n=1}^{\infty}$ og hvorfor?

2. Bevis at rekka $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)n!}$ absolutt convergerer til $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$.

3. Definer hva det vil si at en rekke av funksjoner $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converegerer uniformt til en funksjon $F(x)$ på en mengde X.

4. Betrakt rekka $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2^n}\right)^n$. Vis at den konvergerer punktvist i $\mathbb{R}$ til en funksjon $f(x)$. Bevis at konvergens er ikke uniformt i hele $\mathbb{R}$, men er unifort i hvert intervallet $[-a,a]$. Er funksjonen $f(x)$ kontinuerlig i $\mathbb{R}$?

Oppgave II

La $F(x,y,z) = x^2e^y - \log(yz) + \frac{x}{z^2}$ og la Σ^2 være flaten definert ved ligningen $F(x,y,z) = 0$. Betrakt punkter $\mathbf{a} = (0,1,1)$, $\mathbf{b} = (1,1,1)$.

1. Beregn differensialet $d_{\mathbf{a}}F$ som en lineær avbildning $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^1$.
2. Bekreft at $\mathbf{a} \in \Sigma^2$. Finn ligningen til tangentplanet $T_{\mathbf{a}}\Sigma^2$ til flaten Σ^2 i punktet $\mathbf{a}$.
3. Bekreft at $\mathbf{b} \notin \Sigma^2$. Skriv ligningen til linja l gjennom punkter $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$. Finn ligningen til planet Π som passerer gjennom linja l og er ortogonal til tangentplanet $T_{\mathbf{a}}\Sigma^2$.
4. La $G : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^3$ være avbildning $t \mapsto (t, -t, -t)$ og $H = F \circ G : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ være den sammensatte funksjonen (hvor $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^1$ er som i oppgave 1 ovenfor). Beregn $H'(t)$ ved bruk av flervariabel kjerneregelen.

Oppgave III

Betrakt funksjonen $f(x,y) = e^{2x} - 4y(1 + \sin(x-y)) - 2e^{x-2y}$.

1. Beregn den andre ordnes Taylors polynom $p_2(x,y)$ i origo $(0,0)$.
2. Bruk den til å beregne grenseverdien $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)+y^2+1}{x^2+y^2}$.

Oppgave IV

Betrakt funksjoner $f(x,y) = x + xy$ og $g(x,y) = (x+y+1)^2 + 2(y-x+1)^2$ på planet $\mathbb{R}^2$.

1. Finn og klassifiser alle kritiske punkter til $f(x,y)$. Har $f(x,y)$ globale maksima eller minima i $\mathbb{R}^2$?
2. Hva slags kurven på planet er gitt ved ligningen $g(x,y) = 4$? Er mengde $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) \leq 4\}$ kompakt?
3. Finn globale maksimumspunkter of globale minimumspunkter til funksjonen $f(x,y)$ i mengde X.