



EKSAMENSOPPGAVE I STA-1001

Eksamen i : STA-1001 Statistikk og sannsynlighet 1

Eksamensdato : Mandag 13. juni 2005

Tid : Kl 1500-1900

Sted : Samvirkegården 4. etasje

Tillatte hjelpemidler : 4 sider notater samt godkjent kalkulator

Oppgavesettet er på 9 sider inkl. forside og tabeller.

Kontaktperson under eksamen: Amanuensis Elinor Ytterstad, tlf 776 44015

Opplysningene nedenfor kan benyttes i oppgaveløsningen:

	fordeling	forventning	varians
Binomisk	$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$ $x = 0, 1, 2, 3, \dots, n$	np	$np(1-p)$
Poisson	$f(x) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^x}{x!}$ $x = 0, 1, 2, \dots$	λt	λt
Hypergeometrisk	$f(x) = \frac{\binom{k}{x} \binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}$ $\max\{0, n - (N - k)\} \leq x \leq \min\{k, n\}$	$\frac{nk}{N}$	$\frac{N-n}{N-1} \cdot n \cdot \frac{k}{N} \cdot \left(1 - \frac{k}{N}\right)$
Gamma	$f(x) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}$ hvis $x \geq 0$	$\alpha\beta$	$\alpha\beta^2$
Kji-kvadrat $n-1$ frihetsgrader	$f(x) = \frac{1}{2^{\frac{n-1}{2}} \Gamma(\frac{n-1}{2})} x^{\frac{n-1}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}$ hvis $x \geq 0$	$n-1$	$2(n-1)$

$$U = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \text{kji-kvadratfordelt med } n-1 \text{ frihetsgrader,}$$

$$\text{der } S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \text{ og } X_i \sim N(\mu, \sigma)$$

$$\int_0^\infty u e^{-u/2} du = 4$$

Oppgavesettet består av 11 punkter som alle teller likt.

OPPGAVE 1 (punktene a og b)

I et debattprogram på TV kan seerne sende inn SMS for å stemme for eller imot en påstand fra programleder. De skal svare "Ja" eller "Nei" til påstanden. I denne oppgaven skal vi anta at 60% av seerne er enig i påstanden og 40% uenig. Vi utelukker vet-ikke seere. I tillegg er sannsynligheten for at en Ja-seer skal ringe inn 0.005, og sannsynligheten for at en Nei-seer skal ringe inn er 0.05.

La J være hendelsen at en seer er enig i påstanden, og R er hendelsen at en seer ringer inn.

- a) Skriv ned opplysningene som er gitt i teksten over som sannsynligheter.

Tegn et Venn-diagram for å vise sammenhengen mellom J og R .

Marker hendelsen $J \cap R$ i diagrammet.

Regn ut $P(J \cap R)$.

- b) Finn $P(R)$.

Hvor stor andel av de som ringer inn er enig i påstanden?

Kommenter om denne SMS-meningsmålingen gir et korrekt bilde av om seerne er enig/uenig i påstanden.

OPPGAVE 2 (punkt a)

Ole skal på ferie og har bestemt seg for å oppsøke 4 av de 8 byene

A B C D E F G H

I utgangspunktet kan han velge de 4 byene helt fritt blant disse 8.

- a) Hvor mange ulike rekkefølger (reiseruter) av 4 byer kan han utføre?

Hvor mange ulike reiseruter kan han utføre dersom rekkefølgen av byene han besøker skal være alfabetisk?

OPPGAVE 3 (punktene a til d)

I en fiskedam er det 50 smålaks og noen av fiskene er angrepet av en parasitt. Anne og Birger har fått i oppgave å estimere andel laks, p , med parasitt ved å undersøke 10 laks hver. De løser oppgaven litt forskjellig. Birger fanger en fisk, registrerer om den har parasitt eller ikke og slipper den tilbake i dammen. Dette gjør han 10 ganger. Anne fanger (etter at Birger er ferdig) 10 fisk og registrerer hvor mange av disse som er angrepet av parasitt, og slipper deretter alle sammen ut i dammen igjen.

La X være antall fisk med parasitt som Birger registrerer og la Y være antall fisk med parasitt som Anne registrerer.

- a) Hvilke fordelinger har X og Y ? Begrunn svaret.
- b) I dette punktet skal vi anta at 30% av fiskene er angrepet av parasitt.
Hva er sannsynligheten for:
1. Birger får minst 2 fisk med parasitt?
 2. Anne får akkurat 2 fisk med parasitt?

Anne og Birger diskuterer hvordan de skal benytte resultatene fra begge undersøkelser samlet til å estimere p , andel fisk som er angrepet av parasitt.

Birger foreslår estimatoren:

$$\hat{p}_B = \frac{X + Y}{20}$$

og Anne mener at hennes forsøk er bedre og bør vektlegges mest i en estimator. Hun foreslår derfor:

$$\hat{p}_A = \frac{40}{89} \cdot \frac{X}{10} + \frac{49}{89} \cdot \frac{Y}{10}$$

- c) Vis at Annes estimator er bedre enn Birgers.
Vis også at Annes estimator har optimal vekting, dvs. det er ingen annen (forventningsrett) vekting av X og Y som gir en bedre estimator enn dette.

Resultatet av forsøkene til Birger og Anne ble: $x=5$ og $y=3$

Vi antar i siste del av oppgaven at Annes estimator er tilnærmet normalfordelt.

- d) Bruk Annes estimator til å teste om det er grunnlag for å påstå at flere enn 30% av fiskene er angrepet av parasitt.
Regn ut og vis at $Var(\hat{p}_A) \approx 0.00944$ dersom $p=0.3$.
Utfør testen på 5% nivå.

OPPGAVE 4 (punktene a til d)

La X være fødselsvekt (gram) i et nordeuropeisk land. Anta X er normalfordelt med forventning 3315 og standardavvik 575

- a) Hva er sannsynligheten for at en tilfeldig valgt nyfødt skal veie mindre enn 2297 gram?
Hva er sannsynligheten for at en tilfeldig valg nyfødt skal veie mellom 2297 og 3298 gram?
Finn fødselsvekten som 15% av de nyfødte i dette landet er tyngre enn.
- b) Regn ut sannsynligheten for at et gjennomsnitt av fire fødselsvekter, $\bar{X}$, skal være mindre enn 2999 gram.
Lag et intervall slik at $\bar{X}$ med 95% sannsynlighet er inneholdt.

La Y være fødselsvekt (gram) i et asiatisk land. Anta også her at fødselsvekt er normalfordelt, men en kjenner verken forventning μ eller standardavvik σ .

Fire tilfeldig valgte nyfødte veies. Resultatet ble:

2400 3400 2800 2500

- c) Regn ut estimater for μ og σ , og lag et 90% konfidensintervall for forventningsverdien.

Test om det fra dette datamaterialet med fire fødselsvekter er grunnlag for å hevde at nyfødte i gjennomsnitt er lettere i asia enn i nordeuropa.

Bruk 5% signifikansnivå.

Forklar hvordan konfidensintervallet i forrige punkt kan benyttes i denne hypotesetesten.

- d) Regn ut forventet lengde til intervallestimatoren i punkt c).
Svaret skal skrives som funksjon av σ .

Tabell for binomiske sannsynligheter/ sannsyn

Tabell for normalfordelingen/ normalfordelinga

Tabell for normalfordelingen, fortsettelse/ normalfordelinga, fortsetting

Tabell for t -fordelingen/ t -fordelinga