Universitetet i Tromsø

Det Matematisk Naturvitenskapelige Fakultet
Institut for Matematikk og Statistikk

Eksamen i:	MAT-1002, Kalkulus-2
Eksamenstid:	Onsdag, 27. September, 2006. Kl. 9.00-13.00
Eksamenssted:	Auditorium maximum. Administrasjonsbygget
Hjelpemidler:	Kalkulator, formelsamling og 4 håndskrevene A4-ark med egne notater (kan skrives på begge sider)
Oppgavesettet:	Totalt på 2 sider
Kontaktperson:	Professor *Boris Kruglikov*, tlf. 776 44 779
Bemerkning:	Besvarelsen må inneholde alle mellomregninger man trenger for å komme fram til svaret

Oppgave I

1. Avgjør konvergens eller divergens av følgende rekker:

$$i.\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+2} \qquad ii.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n+2^n} \qquad iii.\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos n}{n^{3/2}+(-1)^n}.$$

   Vil konvergens bytte hvis rekkene er forandret til rekkene med $\sum_{n=4}^{\infty}$ og hvorfor?

2. Bevis at rekka $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(6n+1)\,(2n)!}$ absolutt convergerer til $\int_0^1 \cos x^3\,dx$.

3. Er det mulig at rekke av funksjoner $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ absolutt konvergerer, men "del" rekka $\sum_{n=1}^{\infty} f_{2n}(x)$ divergerer?

4. Betrakt rekka $\sum_{n=0}^{\infty}\sin\frac{x^n}{2^n}$. Vis at den konvergerer punktvist i $(-2,2)$ til en funksjon $f(x)$. Er $f(x)$ kontinuerlig i $(-2,2)$? Bevis at konvergens er ikke uniformt, men er unifort i intervallet $[-2+\epsilon, 2-\epsilon]$ for hver $\epsilon \in (0,1)$.

Oppgave II

La $F(x,y,z) = \cos\dfrac{\pi y}{x^2} + e^{z-3y+3x-1}$ og la Σ^2 være flaten definert ved ligningen $F(x,y,z) = 0$. Betrakt kurven $\ell^1 = \{(t,t^2,t^3) : t \in \mathbf{R}\}$.

1. Bekreft at $\mathbf{a} = (-1,-1,1) \in \Sigma^2$. Beregn differensialet $d_{\mathbf{a}}F$ som en lineær avbildning $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^1$.
2. Finn ligningen til normallinjen $N_{\mathbf{a}}\Sigma^2$ til flaten Σ^2 i punktet $\mathbf{a}$.
3. Beregn punktet $\mathbf{b} = \ell^1 \cap \Sigma^2$ hvor linja ℓ^1 krysser flaten Σ^2. Skriv ligningen til tangentlinja $T_{\mathbf{b}}\ell^1$ til ℓ^1 i punktet $\mathbf{b}$.
4. Beregn distansen $d = \operatorname{dist}(N_{\mathbf{a}}\Sigma^2, T_{\mathbf{b}}\ell^1)$ og finn ligningen til linja kryssende linjene $N_{\mathbf{a}}\Sigma^2$ og $T_{\mathbf{b}}\ell^1$, som er ortogonale til begge linjene.

Oppgave III

Betrakt funksjonen $F(x,y) = f(g(x,y), h(x,y))$, hvor funksjonene g, h er $g(x,y) = (1+x)e^{y-2x}$, $h(x,y) = \cos(2y-x)$ og om $f = f(u,v)$ vet vi at $f(1,1) = -1$, $f_u(1,1) = 1$, $f_v(1,1) = -2$.

1. Ved bruk av flerevariabel kjerneregelen beregn $F_x(0,0)$ og $F_y(0,0)$.
2. Beregn den første ordnes Taylors polynom $p_1(x,y)$ til $F(x,y)$ i origo $(0,0)$ og bruk den til å beregne grenseverdien

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(y-x)(1+F(x,y)) + 2xy}{x^2+y^2}.$$

Oppgave IV

Betrakt funksjonen $f(x,y) = x^2 - x + y^2 + 2$ på planet $\mathbb{R}^2$.

1. Finn og klassifiser alle kritiske punkter til $f(x,y)$. Har $f(x,y)$ globale maksima eller minima i $\mathbb{R}^2$?
2. Tegn mengde $X = \{|x| + |y| \leq 1\}$. Er den kompakt og hvorfor?
3. Finn globale maksimumspunkter of globale minimumspunkter til funksjonen $f(x,y)$ i mengde X.