EKSAMENSOPPGAVE I KALKULUS 3 – MAT-1003 (BOKMÅL).

Eksamen i	:	**Kalkulus 3**
Eksamensdato	:	**4. desember 2006.**
Tid	:	**1500 - 1900**
Sted	:	**Åsgårdveien 9.**
Tillatte hjelpemidler	:	**2 A4 ark skrevet på begge sider**
		Rottmanns tabeller

Oppgavesettet er på 4 sider inkl. forside

Kontaktperson under eksamen: **Professor Einar Mjølhus,**
Tlf (776)44013
77687648 (heime)

I dette oppgavesettet vil hvert delspørsmål a), b), ..., telle likt, med unntak av oppgave 1, som vil telle som to delspørsmål.

Oppgave 1

Beregn

$$\iint_R \cos(x+y)dxdy$$

der R er parallellogrammet med hjørner $(\frac{\pi}{2},0)$, $(0,\frac{\pi}{2})$, $(-\frac{\pi}{2},0)$ og $(0,-\frac{\pi}{2})$. Tegn figur.

Oppgave 2.

Flaten S er gitt ved parameterframstillingen

$$x = u\cos v$$
$$y = u\sin v$$
$$z = h(1-\frac{u}{R})$$
$$(u,v) \in [0,R]\times[0,2\pi]$$

Her er x, y, z kartesiske koordinater i $\mathbf{R}^3$, og h og R er positive konstanter.

a) Finn kartesisk ligning for S, d. v. s. en ligning på formen $f(x,y,z)=0$, samt variasjonsområde for x, y og z. Lag så en skisse av S som viser de viktigste trekk, inklusive rollen til konstantene h og R. Bestem også eventuelle punkt der S ikke er glatt.

b) Utled formler for arealet av S samt volumet mellom S og xy-planet, uttrykt ved R og h.

c) La vektorfeltet $\mathbf{v}$ være gitt som

$$\mathbf{v}(x,y,z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$

der $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ er enhetsvektorer langs henholdsvis x-,y- og z-aksen. Beregn fluksen av $\mathbf{v}$ gjennom S, når orienteringen av S er bestemt av at normalen har positiv $\mathbf{k}$-komponent.

Oppgave 3.

Vektorfeltene **F** og **G** er gitt ved henholdsvis

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (y+z)\mathbf{i} + (z+x)\mathbf{j} + (x+y)\mathbf{k}$$
$$\mathbf{G}(x,y,z) = (z+x)\mathbf{i} + (x+y)\mathbf{j} + (y+z)\mathbf{k}$$

a) Avgjør om ett eller begge disse vektorfeltene er gradienten til en skalarfunksjon.

b) I tilfelle positiv konklusjon under a), finn denne skalarfunksjonen.

c) La C være den stykkevis glatte lukkede kurven som danner omkretsen til kvadratet med hjørner i (0,0), (1,0), (1,1) og (0,1), orientert i positiv omløpsretning (mot klokka). Beregn

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

og

$$\oint_C \mathbf{G} \cdot d\mathbf{s}\,.$$

d) La Γ være en enkel lukket stykkevis glatt begrenset kurve, som ligger i et plan P med enhetsnormalvektor **n.** Γ omslutter et område D i planet P med areal A. Γ gis orientering konsistent med orienteringen av planet P. Vis at

$$\oint_\Gamma \mathbf{G} \cdot d\mathbf{s} = kA$$

der k bare avhenger av **n**. Hva blir største og minste verdi k kan ha, og hva blir k når P er xy-planet?

Oppgave 4.

a) La V være et endelig-dimensjonalt indreproduktrom over **C**, altså at skalarene er komplekse tall. Definer hva som menes med at en operator L definert på V er *selvadjungert.* La spesielt V være vektorrommet av lineærkombinasjoner av funksjonene $u_1(x) = \cos x$ og

$u_2(x) = \sin x$, la indreproduktet være

$$\langle u, v \rangle = \int_0^{2\pi} u(x)\overline{v(x)}dx$$

der strek over betyr kompleks konjugering, og la L være

$$Lu = -i\frac{du}{dx}.$$

Påvis at L er en lineær operator på V og vis at den er selvadjungert. Vink: For å vise at den er selvadjungert, kan man benytte delvis integrasjon og benytte at alle funksjoner i V er periodiske med periode 2π.

b) Finn egenverdiene og egenvektorene til L. Egenvektorene skal uttrykkes som funksjoner i V.

Lykke til