EKSAMENSOPPGÅVE I KALKULUS 3 – MAT-1003 (NYNORSK).

Eksamen i	:	**Kalkulus 3**
Eksamensdato	:	**4. desember 2006.**
Tid	:	**1500 - 1900**
Sted	:	**Åsgårdveien 9.**
Tilletne hjelpemiddel	:	**2 A4 ark skrivne på begge sider**
		Rottmanns tabellar

Oppgåvesettet er på 4 sider inkl. forside

Kontaktperson under eksamen: **Professor Einar Mjølhus,**
Tlf (776)44013
776 87648 (heime).

I dette oppgåvesettet tel kvart delspørsmål a), b), ..., likt, med unnatak av oppgåve 1, som tel som to delspørsmål.

Oppgåve 1

Rekn ut

$$\iint_R \cos(x+y)dxdy$$

der R er parallellogrammet med hjørner $(\frac{\pi}{2},0)$, $(0,\frac{\pi}{2})$, $(-\frac{\pi}{2},0)$ og $(0,-\frac{\pi}{2})$. Teikn figur.

Oppgåve 2.

Flata S er gitt ved parameterframstillinga

$$x = u\cos v$$
$$y = u\sin v$$
$$z = h(1-\frac{u}{R})$$
$$(u,v) \in [0,R]\times[0,2\pi]$$

Her er x, y, z kartesiske koordinatar i $\mathbf{R}^3$, og h og R er positive konstantar.

a) Finn kartesisk likning for S, d. v. s. ei likning på forma $f(x,y,z)=0$, og dertil variasjonsområde for x, y og z. Lag så ei skisse av S som viser dei viktigaste trekka, inklusive rollen til konstantane h og R. Bestem også eventuelle punkt der S ikkje er glatt.

b) Utleid formlar for arealet av S og volumet mellom S og xy-planet, uttrykt ved R og h.

c) La vektorfeltet $\mathbf{v}$ vera gitt som

$$\mathbf{v}(x,y,z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$

der $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ er einingsvektorar langs henholdsvis x-,y- og z-aksen. Rekn ut fluksen av $\mathbf{v}$ gjennom S, når orienteringa av S er bestemt av at normalen har positiv $\mathbf{k}$-komponent.

Oppgave 3.

Vektorfelta **F** og **G** er gitt ved henholdsvis

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (y+z)\mathbf{i} + (z+x)\mathbf{j} + (x+y)\mathbf{k}$$
$$\mathbf{G}(x,y,z) = (z+x)\mathbf{i} + (x+y)\mathbf{j} + (y+z)\mathbf{k}$$

a) Avgjer om eitt eller begge desse vektorfelta er gradienten til ein skalarfunksjon.

b) I tilfelle positiv konklusjon under a), finn denne skalarfunksjonen.

c) La C vera den stykkevis glatte kurven som utgjer omkrinsen til kvadratet med hjørner i (0,0), (1,0), (1,1) og (0,1), orientert i positiv omlaupsretning (mot klokka). Rekn ut

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

og

$$\oint_C \mathbf{G} \cdot d\mathbf{s}\,.$$

d) La Γ vera ei enkel lukka stykkevis glatt begrensa kurve, som ligg i eit plan P med einingsnormalvektor **n.** Γ omsluttar eit område D i planet P med areal A. Γ får orientering konsistent med planet P. Vis at

$$\oint_\Gamma \mathbf{G} \cdot d\mathbf{s} = kA$$

der k berre avheng av **n**. Kva blir største og minste verdi k kan ha, og kva blir k når P er xy-planet?

Oppgave 4.

a) La V vera eit endeleg-dimensjonalt indreproduktrom over **C**, altså at skalarane er komplekse tal. Definer kva det tyder at ein operator L definert på V er *sjølvadjungert.* La spesielt V vera vektorromet av lineærkombinasjonar av funksjonane $u_1(x) = \cos x$ og $u_2(x) = \sin x$, la indreproduktet vera

$$\langle u, v \rangle = \int_0^{2\pi} u(x)\overline{v(x)}dx$$

der strek over tyder kompleks konjugering, og la L vera

$$Lu = -i\frac{du}{dx}.$$

Påvis at L er ein lineær operator på V og vis at han er sjølvadjungert. Vink: For å visa at L er sjølvadjungert, kan ein nytta delvis integrasjon og nytta at alle funksjonar i V er periodiske med periode 2π.

b) Finn egenverdiene og egenvektorene til L. Egenvektorene skal uttrykkes som funksjoner i V.

Lykke til