



EKSAMENSOPPGAVE MAT-1004
(BOKMÅL)

Eksamen i : **Mat-1004 Lineær algebra.**
Dato : **Mandag 25. september 2006.**
Tid : **09.00 - 13.00.**
Sted: : **Aud. max., Administrasjonsbygget.**
Tillatte hjelpemidler : **Godkjent kalkulator,**
to A4 ark egne notater og
Rottmanns tabeller.

Oppgavesettet er på 4 sider eks. forside, og inneholder 10 deloppgaver: 1ab, 2abcd, 3abcd.

Kontaktperson: Professor Andrei Prasolov, mobil 93 67 58 32.

Begrunn svarene dine, vis fremgangsmåte ved oppgaveløsningen tydelig!

1 OPPGAVE

La U , V , W være følgende underrom i $\mathbb{R}^4$:

U = løsningsrommet til likningen $x_1 + x_3 + x_4 = 0$;

V = løsningsrommet til likningen $x_1 - x_3 + x_4 = 0$;

$W = U \cap V$ = løsningsrommet til systemet $\begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$.

a) Finn en basis

$$\beta = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$$

for $\mathbb{R}^4$, som har følgende egenskaper:

- $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ er en basis for W ;
- $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ er en basis for U ;
- $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_4\}$ er en basis for V .

b) Beskriv vektoren

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

som en lineær kombinasjon av vektorene $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ fra deloppgave a).

2 OPPGAVE

La A være følgende 2×2 -matrise:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}.$$

Vi minner om at matrisene B og C er **similære** dersom det eksisterer en inverterbar matrise P slik at

$$P^{-1}BP = C.$$

Vi minner også om at en matrise er diagonaliserbar (*diagonalizable*) dersom den er similær til en diagonalmatrise.

La

$$f(x) = x^2 + ax + b$$

være et annengrads polynom, der $a, b \in \mathbb{R}$ er vilkårlige reelle tall.

a) Bevis at matrisene $f(B)$ og $f(C)$ er similære hvis matrisene B og C er similære.

b) Finn egenverdiene til A . For hver egenverdi λ , **beskriv** egenrommet $E(\lambda)$, dvs. finn dimensjonen til $E(\lambda)$, og finn en basis for $E(\lambda)$.

c) Undersøk om matrisen A er diagonaliserbar; finn reelle tall a og b slik at

$$f(A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Hint: finn en diagonalmatrise D som er similær til A , og et annengrads polynom f slik at

$$f(D) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(det er **mye lettere** å gjøre for diagonalmatriser). Bevis deretter at samme polynomet kan brukes også for matrisen A .

d) La E være en annen 2×2 -matrise:

$$E = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Beregn $f(E)$ der $f(x)$ er polynomet du fant i deloppgave c). Undersøk om matrisene A og E er similære.

3 OPPGAVE

Vi kaller en kvadratisk matrise X **anti-symmetrisk** dersom

$$X^T = -X$$

der X^T er den transponerte til X . Matrisen

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

er et eksempel på en anti-symmetrisk matrise fordi

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) La B være en vilkårlig $n \times n$ -matrise, og X være en anti-symmetrisk $n \times n$ -matrise. Bevis at matrisen

$$B^T X B$$

er anti-symmetrisk.

b) Betrakt følgende underrom av vektorrommet $M_{3 \times 3}$ av alle 3×3 -matriser:

$$V = \{X \in M_{3 \times 3} \mid X^T = -X\},$$

dvs. V er rommet av anti-symmetriske 3×3 -matriser. Finn dimensjonen til V og bygg en basis β til V (du behøver **ikke** å bevise at V er et underrom).

(Fortsettelse av oppgave 3 er på neste side)

c) La

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, X \in V,$$

og

$$L(X) = B^T X B.$$

Funksjonen

$$L : V \longrightarrow V$$

er en lineær operator (du behøver **ikke** å bevise dette).

Finn matrisen $[L]_{\beta}$ til operatoren L med hensyn til basisen β du fant i deloppgave b).

d) Finn dimensjonen og en basis til kjernen (*kernel*) $Ker(L)$ til operatoren L fra deloppgave c).

Vi minner om at

$$Ker(L) = \{X \in V \mid L(X) = \mathbf{0}\}.$$

LYKKE TIL!