

Eksamensoppgåve Mat-2101

Eksamen i	:	MAT-2101 Hilbertrom
Eksamensdato	:	Torsdag 14. desember
Tid	:	15:00 - 19:00
Stad	:	Åsgårdveien 9
Hjelpemiddel	:	- Rottmanns tabellar og to A4-ark (4 sider) med egne notater. - Godkjend kalkulator.

Oppgavesettet er på 3 sider inklusive forside

Kontaktperson under eksamen: Marius Overholt, Tlf 776 44022

Oppgåve 1

(X, d) er eit metrisk rom og $(x_n)_{n=1}^\infty$ ei uendeleg fylgje i dette rommet.

a) Svar på spørsmåla

(i) Kva vil det seie at $(x_n)_{n=1}^\infty$ konvergerar til x ?

(ii) Kva vil det seie at $(x_n)_{n=1}^\infty$ er ei Cauchyfylgje?

(iii) Kva vil det seie at (X, d) er komplett?

b) Syn at kvar og ei konvergent fylgje er ei Cauchyfylgje.

Oppgåve 2

Det er gjeve eit regulært Sturm-Liouville egenverdiproblem på forma

$$-\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) + q(x)y(x) = \lambda w(x)y(x) \quad , \quad y(a) = y(b) = 0 \quad .$$

a) Gje Sturm-Liouville operatoren L som høyrer til dette problemet og spesifiser domenet D_L . Skriv ned det vekta indreproduktet $\langle \cdots | \cdots \rangle_w$ og den vekta normen $\| \cdots \|_w$ som høyrer til problemet.

b) Syn ved ei utrekning at L er ein symmetrisk operator på Hilbertrommet $(L^2([a, b]), \langle \cdots | \cdots \rangle_w)$.

Oppgåve 3

a) Syn at den lineære operatoren T som er gjeve ved

$$(Tf)(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(t-s)f(s) ds$$

på $L^1([-\pi, \pi])$ har operatornorm (uniform norm) $\|T\| \leq 4$.

b) Slå fast biletet $\text{ran}(T)$ til T . Grunngje stutt at T er ein kompakt operator.

Oppg ve 4

a) Ei funksjonsfylgje $(f_n(x))_{n=1}^\infty$ og ein funksjon $f(x)$ er gjeve p  eit lukka og avgrensa intervall $[a, b]$. Kva vil det seie at

(i) $f_n(x) \rightarrow f(x)$ uniformt p  $[a, b]$ n r $n \rightarrow \infty$?

(ii) $f_n(x) \rightarrow f(x)$ punktvis p  $[a, b]$ n r $n \rightarrow \infty$?

(iii) $f_n(x) \rightarrow f(x)$ i $L^2([a, b])$ n r $n \rightarrow \infty$?

Av omsyn til einfelde kan du g  ut fr  at f_n og f er kontinuerlege.

b) Syn at uniform konvergens p  $[a, b]$ impliserer punktvis konvergens p  $[a, b]$ og konvergens i $L^2([a, b])$.

c) Utvid funksjonen $\cos(x/2)$ fr  intervallet $[-\pi, \pi]$ til ein funksjon $f(x)$ p  heile tallinja ved 2π -periodisitet. Skiss r grafen til $f(x)$ p  intervallet $[-2\pi, 2\pi]$. Funksjonen $f(x)$ har ein Fourierekspansjon

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}$$

p  $[-\pi, \pi]$. Avgjer utan rekning om denne Fourierekspansjonen konvergerer

(i) uniformt p  $[-\pi, \pi]$,

(ii) punktvis p  $[-\pi, \pi]$,

(iii) i $L^2([-\pi, \pi])$,

til $f(x)$.

d) Finn Fourierekspansjonen til $f(x)$. (Rekn alt  ut koeffisientane c_n).