EKSAMENSOPPGAVE MAT-3300

Eksamen i	**:**	**MAT-3300 Algebra 2.**
Dato	**:**	**Tirsdag 05. desember 2006.**
Tid	**:**	**09.00 - 13.00.**
Sted:	**:**	**Åsgårdvegen 9**
Tillatte hjelpemidler	**:**	**Godkjent kalkulator og 2 ark notater.**

Oppgavesettet består av forsiden, 3 sider oppgaveteksten og én side formelark. Settet inneholder 3 oppgaver som er delt opp i 9 deloppgaver: 1ab, 2abcd, 3abc.

Kontaktperson: Professor Andrei Prasolov, mobil 93 67 58 32.

1 OPPGAVE

Gitt permutasjonsgruppen S_{11}.

a) Bevis at det **ikke** finnes noen undergruppe i S_{11} som består av 35 elementer.

Hint: vis først (ved hjelp av Sylow teoremer) at en slik undergruppe må være **syklisk**. Undersøk deretter om det finnes elementer i S_{11} som har orden 35 (bruk sykelnotasjonen til elementene).

b) Finn en undergruppe av orden 55 i permutasjonsgruppen S_{11}. Du behøver **ikke** å skrive ned alle 55 elementene til undergruppen. Det er nok å velge **generatorer** til undergruppen, og bevise deretter at undergruppen generert av de utvalgte elementene består av 55 elementer.

Hint: finn en syklisk undergruppe $K = \langle a \rangle$ av orden 11 og en syklisk undergruppe $H = \langle b \rangle$ av orden 5, slik at b virker på K ved konjugasjon (se Formelarket 4.1) på følgende måte:

$$bab^{-1} = a^s$$

der s er et element av orden 5 i den multiplikative gruppen

$$(\mathbb{Z}_{11})^* = Aut\,(\mathbb{Z}_{11})\,.$$

Vis deretter at HK er den ønskede undergruppen av orden 55.

2 OPPGAVE

La K være en kommutativ kropp, og $R = K[X]$ være ringen av polynomer over K. Betrakt mengden

$$S = \{f \in R \mid f(0) \neq 0\}.$$

a) Vis at S er et multiplikativt system i R.

b) Finn alle idealer i lokaliseringen $S^{-1}R$.

Hint 1: du kan betrakte $S^{-1}R$ som en underring i kvotientkroppen $K(X)$ til $K[X]$, dvs.

$$S^{-1}R = \left\{\frac{f}{g} \in K(X) \mid g(0) \neq 0\right\}.$$

Hint 2: vis at ethvert ikke-trivielt ($\neq 0$) ideal $I \lhd S^{-1}R$ har formen $I = \langle X^s \rangle$ der

$$s = \max\left\{i \in \mathbb{Z} \mid I \subseteq \langle X^i \rangle\right\},$$

dvs. s er det maksimale hele tallet med egenskapen $X^s | f$ for **alle** $f \in I$.

c) Bruk deloppgave **b)** til å finne alle **prim**idealer i $S^{-1}R$.

d) Bruk deloppgave **b)** til å finne alle **maksimale** idealer i $S^{-1}R$.

3 OPPGAVE

La $R = K[T]$ være ringen av polynomer over kroppen

$$K = \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$$

(se Formelark 4.2). Betrakt følgende 4×4 matriser over K:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Matrisen A definerer en R-modul struktur på vektorrommet K^4:

$$f \cdot x = f(A)x, f \in R, x \in K^4.$$

Betegn K^4 med denne modulstrukturen som M. Beskriv M som et direkte produkt (eller en direkte sum) av primære sykliske moduler.

b) Finn den modifiserte Frobenius-formen til matrisen A.

c) Undersøk om matrisene A og B er similære.

Hint: matrisen B er allerede gitt i den modifiserte Frobenius-formen. Sammenlign de to formene.

LYKKE TIL!

4 FORMELARK

4.1 Konjugasjon i permutasjonsgruppen

La $\sigma \in S_m$ skrives slik på normal form

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & m \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & ... & \sigma(m) \end{bmatrix}.$$

og $\tau \in S_m$ skrives slik i sykelnotasjon:

$$\tau = (t_1, t_2, t_3, ..., t_r)(u_1, u_2, u_3, ..., u_s)...$$

Da kan $\sigma\tau\sigma^{-1}$ skrives slik i sykelnotasjon:

$$\sigma\tau\sigma^{-1} = (\sigma(t_1), \sigma(t_2), \sigma(t_3), ..., \sigma(t_r))(\sigma(u_1), \sigma(u_2), \sigma(u_3), ..., \sigma(u_s))...$$

4.2 Ringen av polynomer $\mathbb{Z}_2[T]$

4.2.1 Listen av irredusible polynomer av grad ≤ 3

$$T, T+1, T^2+T+1, T^3+T^2+1, T^3+T+1.$$

4.2.2 Noen nyttige formler i $\mathbb{Z}_2[T]$

$$\begin{aligned} (T+1)^2 &= T^2+1, \\ (T+1)(T^2+T+1) &= T^3+1, \\ (T^2+T+1)^2 &= T^4+T^2+1. \end{aligned}$$