EKSAMENSOPPGAVE I STA-1002

Eksamen i	:	**STA-1002 Statistikk og sannsynlighet 2**
Eksamensdato	:	**Torsdag 28. september 2006**
Tid	:	**Kl 0900-1300**
Sted	:	**Auditorium maximum**
Tillatte hjelpemidler	:	**4(A4) sider notater og godkjent kalkulator**

Oppgavesettet er på 13 sider inkl. forside

Kontaktperson under eksamen: Amanuensis Elinor Ytterstad, tlf 77 64 4015

	fordelingsfunksjonen	forventningsverdi	varians
normal	$n(x;\mu,\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$	$E(X)=\mu$	$Var(X)=\sigma^2$
F, frihetsgrader: υ_1,υ_2		$E(X)=\frac{\upsilon_2}{\upsilon_2-2},\upsilon_2>2$	

Oppgavesettet består av ni delspørsmål som teller likt i bedømmingen.

Oppgave 1
(delspørsmål a)

En ornitolog forsker på havørn. Hun overvåker et område i to hekkesesonger. Det ene året var det god næringstilgang mens det andre året dårlig. Antall flygedyktige unger per hekkende par ble registrert begge år:

næringstilgang	god	dårlig
Antall unger per par		
0	20	60
1	40	60
2	40	30

a) Undersøk om andelen av årskullet med 0, 1 eller 2 flygedyktige unger er forskjellig i år med god næringstilgang fra år med dårlig næringstilgang. Bruk 5% signifikansnivå. Hvilke forutsetninger gjør du her?

Oppgave 2
(delspørsmål a-e)

La $X_1, X_2, \cdots, X_n$ og $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ være to uavhengige utvalg fra normalfordelte populasjoner $N(\mu_X, \sigma_X)$ og $N(\mu_Y, \sigma_Y)$

a) Utled sannsynlighetsmaksimeringsestimatorene $\hat{\sigma}_X^2$, $\hat{\sigma}_Y^2$, for σ_X^2 , σ_Y^2

Foreslå en estimator for $\theta = \frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2}$, Er den forventningsrett for θ? Begrunn svaret.

I resten av oppgaven skal vi anta at $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma^2$

b) Skriv opp variansen til $\overline{X} - \overline{Y}$ og en estimator for σ^2
Skriv deretter opp testobservatoren T, for test av

$$H_0 : \mu_X = \mu_Y \text{ mot } H_0 : \mu_X \neq \mu_Y$$

Ufør en test av hypotesene på 5% nivå for datamaterialet nedenfor

$i =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	gjennomsnitt	s^2
x_i	110	96	132	106	135	109	107	118	84	127	112,4	$\frac{2302.4}{9}$
y_i	136	103	140	128	145	95	142	127	128	140	128,4	$\frac{2550.4}{9}$
$d_i = x_i - y_i$	-26	-7	-8	-22	-10	14	-35	-9	-44	-13		

I tabellen er: $s_X^2 = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{10}(x_i - \bar{x})^2$, $s_Y^2 = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{10}(y_i - \bar{y})^2$

c) Fyll inn det som mangler i ANOVA-tabellen

	SS	frihetsgrader	MS	F
Behandling				4.75
Error				
Total	6132.8	19		

Bruk opplysningene i ANOVA-tabellen til å teste hypotesen i forrige punkt.
Forklar sammenhengen mellom variansanalyse og testen du brukte i forrige punkt.

Datamaterialet er poengsummer fra bowlingspill. En spiller har mistanke om at resultatene i andre spillerunde er bedre enn i første runde samme dag. X_i og Y_i er poengsummene fra dag nr i for hhv første og andre spillerunde.

d) Utvid variansanalysemodellen i forrige punkt slik at den også tar hensyn til eventuelle forskjeller mellom dager. Skriv opp den nye modellen.
Sett opp ANOVA-tabellen og test om poengsummene i spillerundene er forskjellige. Bruk 5 % nivå. Du kan bruke at den nye SSE=1210.0

Dersom en vil teste om poengsummen i andre spillerunde er høyere (bedre) enn i første, hvordan kan en da bruke opplysningene i ANOVA-tabellen her.

e) Med de nye opplysningene som er tilkommet (X_i og Y_i er poengsummene fra samme dag) etter at analysen i punkt b) ble utført, forklar hvordan testen i b) må endres slik at den tar hensyn til en eventuell sammenheng i poengsummene samme dag. Du trenger ikke gjøre noen beregninger her.

Regn ut s_D^2, utvalgsvariansen til $D_i = X_i - Y_i$ over 10 dager, sammenlign med $SSE/9$ fra modellen i punkt d) og kommenter.

Test også hypotesene i b) med den ikke-parametriske testen "tegn-test".
Finn P-verdien.

Oppgave 3
(delspørsmål a-c)

Skal tilpasse flere regresjonsmodeller til følgende data:

Y	x_1	x_2	x_3	x_4
240	25	24	91	100
236	31	21	90	95
290	45	24	88	110
274	60	25	87	88
301	65	25	91	94
316	72	26	94	99
300	80	25	87	97
296	84	25	86	96
267	75	24	88	110
276	60	25	91	105
288	50	25	90	100
261	38	23	89	98

Y=strømforbruk til en industribedrift per mnd
x_1=temperatur i omgivelsen
x_2=antall produksjonsdager i måneden
x_3=produktrenhet
x_4=produsert mengde i tonn

Resultater av analysene er finner du tilslutt i oppgaven.

Modell A: $Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \varepsilon$

Modell B: $Y = \beta_0 + \beta_2 x_2 + \varepsilon$

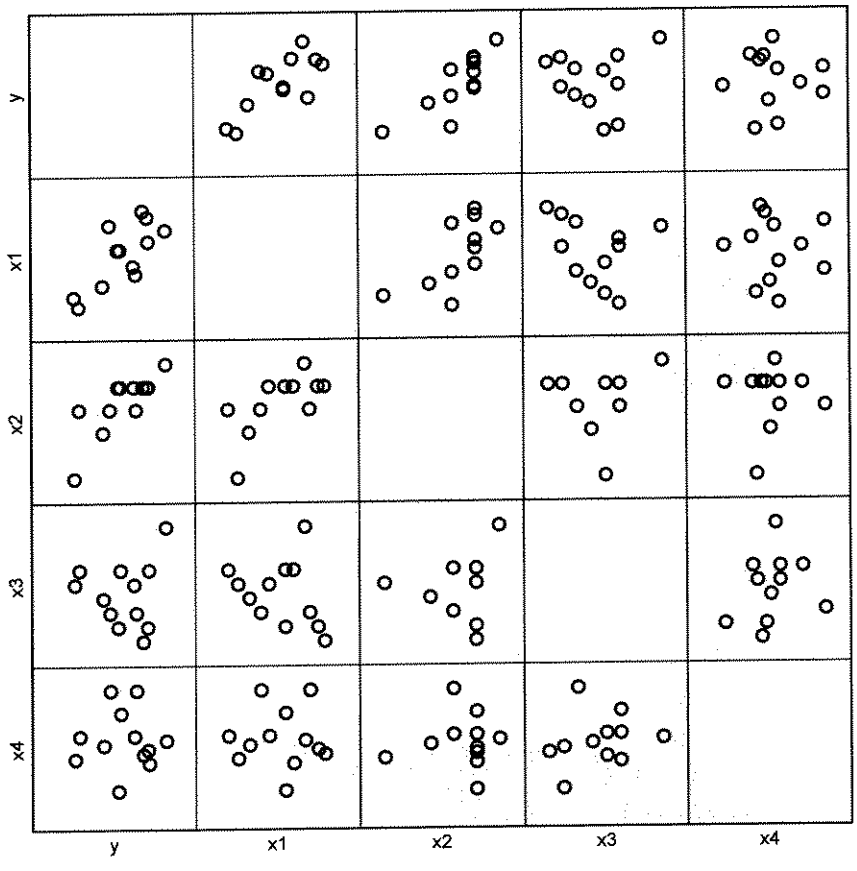
Modell C: $Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4 + \varepsilon$

a) Skiv opp forutsetningene for regresjonsmodell.
Skriv modell A på matriseform.
Skriv opp estimert regresjonsligning for modell A og hva sier koeffisientenes P-verdier om denne modellen
Regn ut R^2 til modell A. Hvordan fortolkes R^2?

b) Test hypotesen $H_0 : \beta_3 = \beta_4 = 0$ i modell C
Test hypotesen $H_0 : \beta_1 = 0$ i modell A
Forklar hva "Studentized Residual" er. Det er ikke nødvendig å oppgi eksakt formel.

c) Hvilken modell A, B eller C er "beste" modell for å beskrive strømforbruk Y. Begrunn svaret.
Bruk denne modellen til å predikere strømforbruket til bedriften en måned med $x_1 = 75,\ x_2 = 24,\ x_3 = 90,\ x_4 = 98$
Regn ut et estimat for $\sigma^2 = Var(\varepsilon)$ på grunnlag av valgte modell.
Finn $P\left(\frac{MSE}{\sigma^2} > 4.5\right)$, (omtrentlig verdi av denne sannsynligheten)

Spredningsplott:



Modell A:

ANOVA[b]

Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	4868,289	2	2434,144	12,253	,003[a]
	Residual	1787,961	9	198,662		
	Total	6656,250	11			

a. Predictors: (Constant), x2, x1

b. Dependent Variable: y

Modell A:

Coefficients[a]

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	,529	95,635		,006	,996
	x1	,497	,292	,392	1,705	,122
	x2	10,267	4,345	,544	2,363	,042

a. Dependent Variable: y

Modell B:

ANOVA[b]

Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	4290,482	1	4290,482	18,136	,002[a]
	Residual	2365,768	10	236,577		
	Total	6656,250	11			

a. Predictors: (Constant), x2

b. Dependent Variable: y

Modell B:

Coefficients[a]

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	-90,161	86,741		-1,039	,323
	x2	15,161	3,560	,803	4,259	,002

a. Dependent Variable: y

Modell C:

ANOVA[b]

Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	4957,241	4	1239,310	5,106	,030[a]
	Residual	1699,009	7	242,716		
	Total	6656,250	11			

a. Predictors: (Constant), x4, x1, x3, x2

b. Dependent Variable: y

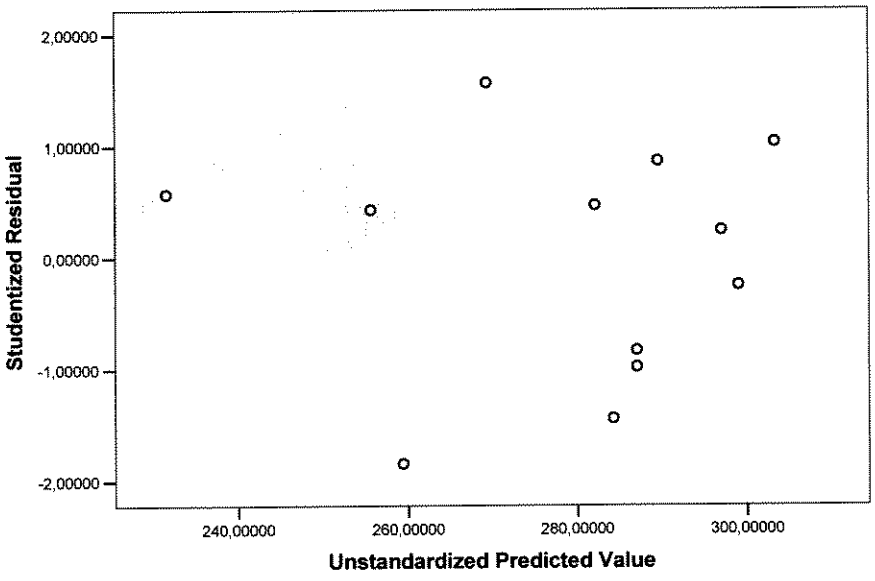
Modell C:

Coefficients[a]

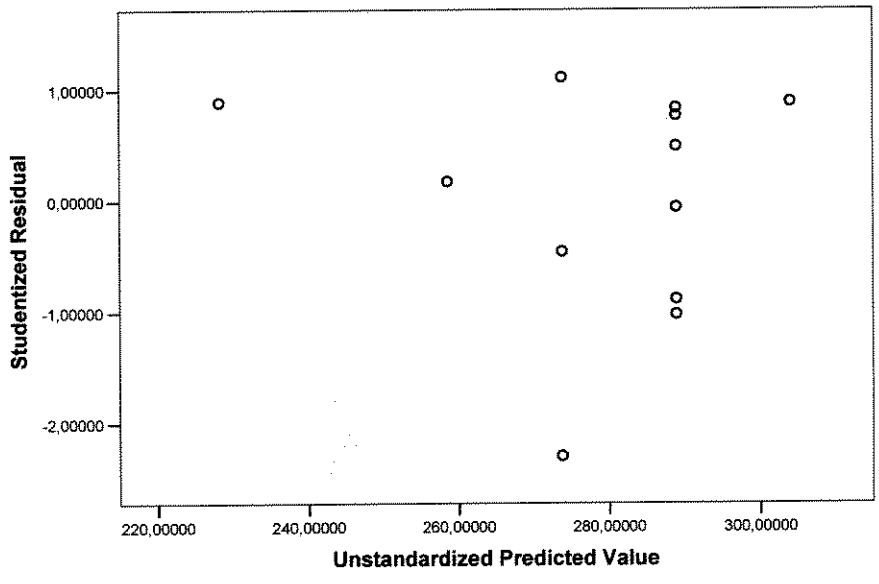
Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	-102,713	207,859		-,494	,636
	x1	,605	,369	,478	1,641	,145
	x2	8,924	5,301	,473	1,684	,136
	x3	1,437	2,392	,133	,601	,567
	x4	,014	,734	,004	,019	,986

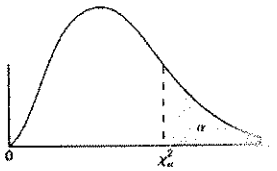
a. Dependent Variable: y

Modell A



Modell B

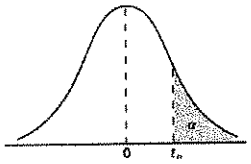




Critical Values of the Chi-Squared Distribution

	α							α							
ν	**0.995**	**0.99**	**0.98**	**0.975**	**0.95**	**0.90**	**0.80**	**0.20**	**0.10**	**0.05**	**0.025**	**0.02**	**0.01**	**0.005**	**0.001**
1	0.0^4393	0.0^3157	0.0^3628	0.0^3982	0.00393	0.0158	0.0642	1.642	2.706	3.841	5.024	5.412	6.635	7.879	10.827
2	0.0100	0.0201	0.0404	0.0506	0.103	0.211	0.446	3.219	4.605	5.991	7.378	7.824	9.210	10.597	13.815
3	0.0717	0.115	0.185	0.216	0.352	0.584	1.005	4.642	6.251	7.815	9.348	9.837	11.345	12.838	16.268
4	0.207	0.297	0.429	0.484	0.711	1.064	1.649	5.989	7.779	9.488	11.143	11.668	13.277	14.860	18.465
5	0.412	0.554	0.752	0.831	1.145	1.610	2.343	7.289	9.236	11.070	12.832	13.388	15.086	16.750	20.517
6	0.676	0.872	1.134	1.237	1.635	2.204	3.070	8.558	10.645	12.592	14.449	15.033	16.812	18.548	22.457
7	0.989	1.239	1.564	1.690	2.167	2.833	3.822	9.803	12.017	14.067	16.013	16.622	18.475	20.278	24.322
8	1.344	1.646	2.032	2.180	2.733	3.490	4.594	11.030	13.362	15.507	17.535	18.168	20.090	21.955	26.125
9	1.735	2.088	2.532	2.700	3.325	4.168	5.380	12.242	14.684	16.919	19.023	19.679	21.666	23.589	27.877
10	2.156	2.558	3.059	3.247	3.940	4.865	6.179	13.442	15.987	18.307	20.483	21.161	23.209	25.188	29.588
11	2.603	3.053	3.609	3.816	4.575	5.578	6.989	14.631	17.275	19.675	21.920	22.618	24.725	26.757	31.264
12	3.074	3.571	4.178	4.404	5.226	6.304	7.807	15.812	18.549	21.026	23.337	24.054	26.217	28.300	32.909
13	3.565	4.107	4.765	5.009	5.892	7.042	8.634	16.985	19.812	22.362	24.736	25.472	27.688	29.819	34.528
14	4.075	4.660	5.368	5.629	6.571	7.790	9.467	18.151	21.064	23.685	26.119	26.873	29.141	31.319	36.123
15	4.601	5.229	5.985	6.262	7.261	8.547	10.307	19.311	22.307	24.996	27.488	28.259	30.578	32.801	37.697
16	5.142	5.812	6.614	6.908	7.962	9.312	11.152	20.465	23.542	26.296	28.845	29.633	32.000	34.267	39.252
17	5.697	6.408	7.255	7.564	8.672	10.085	12.002	21.615	24.769	27.587	30.191	30.995	33.409	35.718	40.790
18	6.265	7.015	7.906	8.231	9.390	10.865	12.857	22.760	25.989	28.869	31.526	32.346	34.805	37.156	42.312
19	6.844	7.633	8.567	8.907	10.117	11.651	13.716	23.900	27.204	30.144	32.852	33.687	36.191	38.582	43.820
20	7.434	8.260	9.237	9.591	10.851	12.443	14.578	25.038	28.412	31.410	34.170	35.020	37.566	39.997	45.315
21	8.034	8.897	9.915	10.283	11.591	13.240	15.445	26.171	29.615	32.671	35.479	36.343	38.932	41.401	46.797
22	8.643	9.542	10.600	10.982	12.338	14.041	16.314	27.301	30.813	33.924	36.781	37.659	40.289	42.796	48.268
23	9.260	10.196	11.293	11.688	13.091	14.848	17.187	28.429	32.007	35.172	38.076	38.968	41.638	44.181	49.728
24	9.886	10.856	11.992	12.401	13.848	15.659	18.062	29.553	33.196	36.415	39.364	40.270	42.980	45.558	51.179
25	10.520	11.524	12.697	13.120	14.611	16.473	18.940	30.675	34.382	37.652	40.646	41.566	44.314	46.928	52.620
26	11.160	12.198	13.409	13.844	15.379	17.292	19.820	31.795	35.563	38.885	41.923	42.856	45.642	48.290	54.052
27	11.808	12.879	14.125	14.573	16.151	18.114	20.703	32.912	36.741	40.113	43.194	44.140	46.963	49.645	55.476
28	12.461	13.565	14.847	15.308	16.928	18.939	21.588	34.027	37.916	41.337	44.461	45.419	48.278	50.993	56.893
29	13.121	14.256	15.574	16.047	17.708	19.768	22.475	35.139	39.087	42.557	45.722	46.693	49.588	52.336	58.302
30	13.787	14.953	16.306	16.791	18.493	20.599	23.364	36.250	40.256	43.773	46.979	47.962	50.892	53.672	59.703

t-fordeling



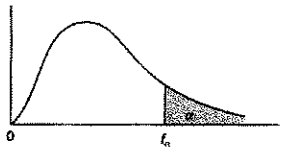
Critical Values of the *t*-Distribution

	α						
v	**0.40**	**0.30**	**0.20**	**0.15**	**0.10**	**0.05**	**0.025**
1	0.325	0.727	1.376	1.963	3.078	6.314	12.706
2	0.289	0.617	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303
3	0.277	0.584	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182
4	0.271	0.569	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776
5	0.267	0.559	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571
6	0.265	0.553	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447
7	0.263	0.549	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365
8	0.262	0.546	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306
9	0.261	0.543	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262
10	0.260	0.542	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228
11	0.260	0.540	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201
12	0.259	0.539	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179
13	0.259	0.537	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160
14	0.258	0.537	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145
15	0.258	0.536	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131
16	0.258	0.535	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120
17	0.257	0.534	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110
18	0.257	0.534	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101
19	0.257	0.533	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093
20	0.257	0.533	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086
21	0.257	0.532	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080
22	0.256	0.532	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074
23	0.256	0.532	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069
24	0.256	0.531	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064
25	0.256	0.531	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060
26	0.256	0.531	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056
27	0.256	0.531	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052
28	0.256	0.530	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048
29	0.256	0.530	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045
30	0.256	0.530	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042
40	0.255	0.529	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021
60	0.254	0.527	0.848	1.045	1.296	1.671	2.000
120	0.254	0.526	0.845	1.041	1.289	1.658	1.980
∞	0.253	0.524	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960

t-fordeling, fortsetter

(continued) Critical Values of the t-Distribution

	α						
ν	**0.02**	**0.015**	**0.01**	**0.0075**	**0.005**	**0.0025**	**0.0005**
1	15.895	21.205	31.821	42.434	63.657	127.322	636.590
2	4.849	5.643	6.965	8.073	9.925	14.089	31.598
3	3.482	3.896	4.541	5.047	5.841	7.453	12.924
4	2.999	3.298	3.747	4.088	4.604	5.598	8.610
5	2.757	3.003	3.365	3.634	4.032	4.773	6.869
6	2.612	2.829	3.143	3.372	3.707	4.317	5.959
7	2.517	2.715	2.998	3.203	3.499	4.029	5.408
8	2.449	2.634	2.896	3.085	3.355	3.833	5.041
9	2.398	2.574	2.821	2.998	3.250	3.690	4.781
10	2.359	2.527	2.764	2.932	3.169	3.581	4.587
11	2.328	2.491	2.718	2.879	3.106	3.497	4.437
12	2.303	2.461	2.681	2.836	3.055	3.428	4.318
13	2.282	2.436	2.650	2.801	3.012	3.372	4.221
14	2.264	2.415	2.624	2.771	2.977	3.326	4.140
15	2.249	2.397	2.602	2.746	2.947	3.286	4.073
16	2.235	2.382	2.583	2.724	2.921	3.252	4.015
17	2.224	2.368	2.567	2.706	2.898	3.222	3.965
18	2.214	2.356	2.552	2.689	2.878	3.197	3.922
19	2.205	2.346	2.539	2.674	2.861	3.174	3.883
20	2.197	2.336	2.528	2.661	2.845	3.153	3.849
21	2.189	2.328	2.518	2.649	2.831	3.135	3.819
22	2.183	2.320	2.508	2.639	2.819	3.119	3.792
23	2.177	2.313	2.500	2.629	2.807	3.104	3.768
24	2.172	2.307	2.492	2.620	2.797	3.091	3.745
25	2.167	2.301	2.485	2.612	2.787	3.078	3.725
26	2.162	2.296	2.479	2.605	2.779	3.067	3.707
27	2.158	2.291	2.473	2.598	2.771	3.057	3.690
28	2.154	2.286	2.467	2.592	2.763	3.047	3.674
29	2.150	2.282	2.462	2.586	2.756	3.038	3.659
30	2.147	2.278	2.457	2.581	2.750	3.030	3.646
40	2.125	2.250	2.423	2.542	2.704	2.971	3.551
60	2.099	2.223	2.390	2.504	2.660	2.915	3.460
120	2.076	2.196	2.358	2.468	2.617	2.860	3.373
∞	2.054	2.170	2.326	2.432	2.576	2.807	3.291



Critical Values of the *F*-Distribution

$f_{0.05}(v_1, v_2)$

	v_1								
v_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	236.8	238.9	240.5
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.17	2.09	2.02	1.96
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88

(continued) Critical Values of the F-Distribution

$f_{0.05}(v_1, v_2)$

	v_1									
v_2	**10**	**12**	**15**	**20**	**24**	**30**	**40**	**60**	**120**	**∞**
1	241.9	243.9	245.9	248.0	249.1	250.1	251.1	252.2	253.3	254.3
2	19.40	19.41	19.43	19.45	19.45	19.46	19.47	19.48	19.49	19.50
3	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
4	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63
5	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.36
6	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67
7	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23
8	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93
9	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71
10	2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
11	2.85	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40
12	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34	2.30
13	2.67	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21
14	2.60	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	2.22	2.18	2.13
15	2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07
16	2.49	2.42	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15	2.11	2.06	2.01
17	2.45	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	1.96
18	2.41	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92
19	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88
20	2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84
21	2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81
22	2.30	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78
23	2.27	2.20	2.13	2.05	2.01	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76
24	2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73
25	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	1.71
26	2.22	2.15	2.07	1.99	1.95	1.90	1.85	1.80	1.75	1.69
27	2.20	2.13	2.06	1.97	1.93	1.88	1.84	1.79	1.73	1.67
28	2.19	2.12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.77	1.71	1.65
29	2.18	2.10	2.03	1.94	1.90	1.85	1.81	1.75	1.70	1.64
30	2.16	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68	1.62
40	2.08	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51
60	1.99	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.53	1.47	1.39
120	1.91	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.50	1.43	1.35	1.25
∞	1.83	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.32	1.22	1.00