EKSAMENSOPPGAVE I STA-2002

Eksamen i	:	Sta-2002 Videregående statistikk
Dato	:	Mandag 11. desember 2006
Tid	:	Kl. 0900–1300
Sted	:	Åsgårdvegen 9
Tillatte hjelpemidler	:	4 sider (A4) egne notater Godkjent kalkulator Rottmanns formelsamling

Oppgavesettet er på 6 sider inklusive forside.

Kontaktperson: Sigrunn H. Sørbye, tlf. 77 64 55 04/92 43 97 22

DET MATEMATISK-NATURVITENSKAPELIGE FAKULTET
Universitetet i Tromsø, N-9037 Tromsø, Telefon 77 64 40 01, Telefaks 77 64 47 65

Oppgave 1

La X angi en kji-kvadratfordelt variabel med p frihetsgrader (se side 4).

a) Vis at

$$E(X^k) = \frac{2^k \Gamma(\frac{p}{2} + k)}{\Gamma(\frac{p}{2})}, \quad k > -p/2$$

og bruk dette til å vise at $E(X) = p$ og $Var(X) = 2p$.

Oppgave 2

Anta at $Y_1, \ldots, Y_n$ er uavhengige og identisk fordelte stokastiske variable fra en eksponensiell familie

$$f(y \mid \theta) = h(y)c(\theta)e^{w(\theta)t(y)}.$$

a) Bevis at $T(\mathbf{Y}) = \sum_{j=1}^{n} t(Y_j)$ vil være en suffisient observator for θ.

Vis at maximum likelihood estimatoren for parameteren θ vil være en funksjon av den suffisiente observatoren $T(\mathbf{Y})$.

Vi antar i resten av denne oppgaven at sannsynlighetstettheten til $Y_1, \ldots, Y_n$ er gitt ved

$$f(y \mid \theta) = \theta y^{\theta - 1}, \quad 0 < y < 1, \quad \theta > 0.$$

b) Vis at $f(y \mid \theta)$ kan uttrykkes som en eksponensiell familie og finn en suffisient observator for θ. Begrunn hvorfor den suffisiente observatoren vil være komplett.

c) Vis at maximum likelihood estimatoren for θ er gitt ved

$$\hat{\theta}_{mle} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln(Y_i)}.$$

d) Vis at

$$W_n = -2\theta \sum_{i=1}^{n} \ln(Y_i) \sim \chi^2_{2n}.$$

(Hint: Vis først at $W_1 \sim \chi^2_2$).

e) Benytt forrige punkt samt oppgave 1 til å vise at en forventningsrett estimator for θ er gitt ved

$$\tilde{\theta} = \frac{n-1}{n}\hat{\theta}_{mle}, \quad n > 1.$$

f) Finn $Var(\tilde{\theta})$ og sammenlign denne med Cramer-Rao's nedre grense for variansen til en forventningsrett estimator for θ. Vil $\tilde{\theta}$ være den beste forventningsrette estimatoren (UMVUE) for θ? Begrunn svaret.

Basert på at $\hat{\theta}_{mle}$ er tilnærmet normalfordelt vil et approksimert $(1-\alpha)100\%$ konfidensintervall for θ være gitt ved

$$\hat{\theta}_{mle} \pm u_{\alpha/2}\frac{\hat{\theta}_{mle}}{\sqrt{n}}$$

der $u_{\alpha/2}$ angir øvre kvantil for en standard normalfordeling.

g) Er W_n en pivotal størrelse? Begrunn svaret. Utled et eksakt $(1-\alpha)100\%$ konfidensintervall for θ. Sammenlign lengden av dette intervallet med lengden av intervallet basert på normaltilnærming for $n = 10$ og $\alpha = 0.05$. Kommenter!

Oppgave 3

Anta $X_1, \ldots, X_n$ uavhengig og identisk normalfordelt med forventning μ og varians lik 1. Da vil $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ være en suffisient observator for μ der $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{1}{n})$. Anta at aprioriforde lingen for parameteren μ er gitt ved en standard normalfordeling, dvs $\pi(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\mu^2}$.

a) Forklar hva det vil si at normalfordelingen er sin egen konjugerte familie.

Vis at

$$\pi(\mu \mid \bar{x}) \propto e^{-\frac{n+1}{2}(\mu - \frac{n}{n+1}\bar{x})^2}$$

og konkluder med at $\mu \mid \bar{x} \sim N(\frac{n}{n+1}\bar{x}, \frac{1}{n+1})$.

Vi ønsker å teste hypotesene

$$H_0 : \mu \leq 0, \quad H_1 : \mu > 0.$$

b) Anta at $n = 20$ og $\bar{x} = 0.37$. Beregn sannsynlighetene

$$P(\mu \leq 0 \mid \bar{x}) \text{ og } P(\bar{X} > \bar{x} \mid \mu = 0).$$

Hva angir disse to sannsynlighetene i forbindelse med hypotesetestingen. Ville du forkastet den gitte nullhypotesen på et 5% signifikansnivå basert på disse resultatene? Begrunn svaret.

Sannsynlighetsfordelinger og formler

Normalfordeling: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$f(x \mid \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}, \quad \sigma > 0.$$

Kji-kvadratfordeling: $X \sim \chi^2_p$

$$\begin{aligned} f(x \mid p) &= \frac{1}{\Gamma(\frac{p}{2}) 2^{\frac{p}{2}}} x^{\frac{p}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}; \quad x \geq 0, \quad p = 1, 2, \ldots \\ M_X(t) &= (1-2t)^{-\frac{p}{2}}, \quad t < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Gammafunksjonen:

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha) &= \int_0^\infty y^{\alpha-1} e^{-y} dy, \quad \alpha > 0 \\ \Gamma(\alpha+1) &= \alpha\Gamma(\alpha), \quad \alpha > 0 \\ \Gamma(\alpha) &= (\alpha-1)! \text{ dersom } \alpha \text{ er et positivt heltall} \end{aligned}$$

NORMALFORDELING (0,1)

$\Phi(x) = P(X \leq x)$

X	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.500	.504	.508	.512	.516	.520	.524	.528	.532	.536
.1	.540	.544	.548	.552	.556	.560	.564	.567	.571	.575
.2	.579	.583	.587	.591	.595	.599	.603	.606	.610	.614
.3	.618	.622	.626	.629	.633	.637	.641	.644	.648	.652
.4	.655	.659	.663	.666	.670	.674	.677	.681	.684	.688
.5	.691	.695	.698	.702	.705	.709	.712	.716	.719	.722
.6	.726	.729	.732	.736	.739	.742	.745	.749	.752	.755
.7	.758	.761	.764	.767	.770	.773	.776	.779	.782	.785
.8	.788	.791	.794	.797	.800	.802	.805	.808	.811	.813
.9	.816	.819	.821	.824	.826	.829	.831	.834	.836	.839
1.0	.841	.844	.846	.849	.851	.853	.855	.858	.860	.862
1.1	.864	.867	.869	.871	.873	.875	.877	.879	.881	.883
1.2	.885	.887	.889	.891	.893	.894	.896	.898	.900	.901
1.3	.903	.905	.907	.908	.910	.911	.913	.915	.916	.918
1.4	.919	.921	.922	.924	.925	.926	.928	.929	.931	.932
1.5	.933	.934	.936	.937	.938	.939	.941	.942	.943	.944
1.6	.945	.946	.947	.948	.949	.951	.952	.953	.954	.954
1.7	.955	.956	.957	.958	.959	.960	.961	.962	.962	.963
1.8	.964	.965	.966	.966	.967	.968	.969	.969	.970	.971
1.9	.971	.972	.973	.973	.974	.974	.975	.976	.976	.977
2.0	.977	.978	.978	.979	.979	.980	.980	.981	.981	.982
2.1	.982	.983	.983	.983	.984	.984	.985	.985	.985	.986
2.2	.986	.986	.987	.987	.987	.988	.988	.988	.989	.989
2.3	.989	.990	.990	.990	.990	.991	.991	.991	.991	.992
2.4	.992	.992	.992	.992	.993	.993	.993	.993	.993	.994
2.5	.9940	.9940	.9942	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9979	.9979	.9980	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9988	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998	.9998
3.5	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998
3.6	.9998	.9998	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3.7	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999

χ^2 - FORDELING

$P(Z > z_{a,\nu}) = a$

ν \ a	.995	.990	.975	.950	.050	.025	.010	.005
1	.00	.00	.00	.00	3.84	5.02	6.63	7.88
2	.01	.02	.05	.10	5.99	7.38	9.21	10.60
3	.07	.11	.22	.35	7.81	9.35	11.34	12.84
4	.21	.30	.48	.71	9.49	11.14	13.28	14.86
5	.41	.55	.83	1.15	11.07	12.83	15.09	16.75
6	.68	.87	1.24	1.64	12.59	14.45	16.81	18.55
7	.99	1.24	1.69	2.17	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.34	1.65	2.18	2.73	15.51	17.53	20.09	21.95
9	1.73	2.09	2.70	3.33	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.16	2.56	3.25	3.94	18.31	20.48	23.21	25.19
11	2.60	3.05	3.82	4.57	19.68	21.92	24.72	26.76
12	3.07	3.57	4.40	5.23	21.03	23.34	26.22	28.30
13	3.57	4.11	5.01	5.89	22.36	24.74	27.69	29.82
14	4.07	4.66	5.63	6.57	23.68	26.12	29.14	31.32
15	4.60	5.23	6.26	7.26	25.00	27.49	30.58	32.80
16	5.14	5.81	6.91	7.96	26.30	28.85	32.00	34.27
17	5.70	6.41	7.56	8.67	27.59	30.19	33.41	35.72
18	6.26	7.01	8.23	9.39	28.87	31.53	34.81	37.16
19	6.84	7.63	8.91	10.12	30.14	32.85	36.19	38.58
20	7.43	8.26	9.59	10.85	31.41	34.17	37.57	40.00
21	8.03	8.90	10.28	11.59	32.67	35.48	38.93	41.40
22	8.64	9.54	10.98	12.34	33.92	36.78	40.29	42.80
23	9.26	10.20	11.69	13.09	35.17	38.08	41.64	44.18
24	9.89	10.86	12.40	13.85	36.42	39.36	42.98	45.56
25	10.52	11.52	13.12	14.61	37.65	40.65	44.31	46.93
26	11.16	12.20	13.84	15.38	38.89	41.92	45.64	48.29
27	11.81	12.88	14.57	16.15	40.11	43.19	46.96	49.64
28	12.46	13.56	15.31	16.93	41.34	44.46	48.28	50.99
29	13.12	14.26	16.05	17.71	42.56	45.72	49.59	52.34
30	13.79	14.95	16.79	18.49	43.77	46.98	50.89	53.67
40	20.71	22.16	24.43	26.51	55.76	59.34	63.69	66.77
50	27.99	29.71	32.36	34.76	67.50	71.42	76.15	79.49
60	35.53	37.48	40.48	43.19	79.08	83.30	88.37	91.95
70	43.28	45.44	48.76	51.74	90.53	95.02	100.42	104.21
80	51.17	53.54	57.15	60.39	101.88	106.63	112.32	116.31
90	59.20	61.75	65.65	69.13	113.14	118.13	124.11	128.29
100	67.33	70.06	74.22	77.93	124.34	129.56	135.80	140.16