Universitetet i Tromsø

Institutt for Matematikk og Statistikk

Eksamen i:	MAT-0001 Brukerkurs i matematikk FSK-1001 Innføring i fiskerifag
Day of exam:	15. desember 2003
Time of exam:	09.00 - 13.00
Place of exam:	MAT-0001 - Samvirkegården 4. et. FSK-1001 - Samvirkegården 3. et.
What is allowed:	All printed and written aids, calculator.

Exam candidates in MAT-0001 or those repeating an exam in Mb-1 should do problems 1-5.

Exam candidates in FSK-1001 should do problems 1-4.

Exam paper in ENGLISH.

Problem 1

The function

$$f(x) = e^x - x$$

is given.

a) Determine on which intervals $f(x)$ is increasing/decreasing.

b) Determine on which intervals the graph of $f(x)$ curves upwards/downwards.

Problem 2

A population grows according to the law

$$\frac{1}{N(t)}\frac{dN}{dt} = a$$

Universitetet i Tromsø

Institutt for Matematikk og Statistikk

Eksamen i:	MAT-0001 Brukerkurs i matematikk FSK-1001 Innføring i fiskerifag
Eksamensdag:	15. desember 2003
Tid for eksamen:	09.00 - 13.00
Sted for eksamen:	MAT-0001 - Samvirkegården 4. et. FSK-1001 - Samvirkegården 3. et.
Tillatte hjelpemiddel:	Alle trykte og skrevne, kalkulator.

Eksamenskandidater i MAT-0001 eller som tar opp igjen eksamen i Mb-1 skal gjøre oppgavene 1-5.

Eksamenskandidater i FSK-1001 skal gjøre oppgavene 1-4.

BOKMÅL oppgavesett.

Oppgave 1

Funksjonen

$$f(x) = e^x - x$$

er gitt.

a) Avgjør på hvilke intervall $f(x)$ er voksende/avtagende.

b) Avgjør på hvilke intervall grafen til $f(x)$ krummer oppover/nedover.

Oppgave 2

Ein populasjon vokser etter loven

$$\frac{1}{N(t)}\frac{dN}{dt} = a$$

hvor t er tid, $N(t)$ er populasjonen sin størrelse, og a er en konstant.

a) Finn a når $N(3) = 10^6$ og $N(5) = 10^7$. Til hjelp: $\ln(10) = 2.3$.

b) Finn en formel for doblingstida T ved a (altså T slik at $N(t+T) = 2N(t)$).

Oppgave 3

a) Finn arealet under kurva $y = 1/x^2$, over x-aksen, og mellom de vertikale linjene $x = 1$ og $x = 2$.

b) Finn arealet under kurva $y = 1/x^2$, over x-aksen, og til høyre for den vertikale linja $x = 1$.

Oppgave 4

a) Skraver regionen R av de punktene (x, y) i xy-planet som oppfyller ulikhetene

$$\begin{aligned} x + 2y &\leq 7 \\ x + y &\geq 2 \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

b) Finn $\max(x - y)$ på R.

Oppgave 5 (Skal ikke gjøres av eksamenskandidater i FSK-1001)

Funksjonen

$$g(x, y) = -xy + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{4}y^4$$

er gitt.

a) Finn alle de partielle deriverte til $g(x, y)$ til og med orden 2.

b) Finn de stasjonære punktene til $g(x, y)$ og klassifiser disse som lokale minimums- eller maksimumspunkt, eller sadelpunkt.

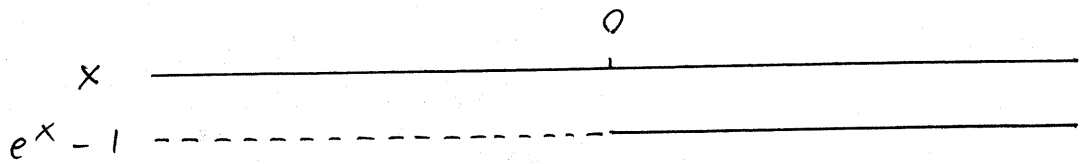
FSK-1001

Løsningsforslag Eksamen MAT-0001 15/12/2003

1a) Vi har

$$f'(x) = (e^x - x)' = (e^x)' - (x)' = e^x - 1$$

Fortegnsskjema



Siden $f'(x) = e^x - 1$ er negativ på $(-\infty, 0)$, er $f(x)$ avtagende der, og siden $f'(x) = e^x - 1$ er positiv på $(0, \infty)$, er $f(x)$ voksende der,

<u>$f(x)$ avtagende på $(-\infty, 0)$, voksende på $(0, \infty)$</u>

b) Vi har

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(e^x - 1) = e^x$$

Siden $e^x > 0$ for alle x, <u>krummer grafen til $f(x)$ oppover på $(-\infty, \infty)$</u>.
(alternativt: $f(x)$ er konveks overalt).

2a) Enhver løsning til differensialligningen er av form

$$N(t) = Ce^{at}$$

hvor C er en konstant. Det er oppgitt at $N(3) = 10^6$ og $N(5) = 10^7$. Dermed er

$$Ce^{a\cdot 3} = N(3) = 10^6$$

$$Ce^{a\cdot 5} = N(5) = 10^7$$

Deler vi den andre likningen på den første, får vi

$$\frac{Ce^{5a}}{Ce^{3a}} = \frac{10^7}{10^6}$$

og dermed $e^{2a} = 10$, som gir $2a = \ln(10)$ altså $\underline{\underline{a = \frac{1}{2}\ln(10) = \frac{1}{2}\cdot 2.3 = 1.2}}$ (korrekt avrundet til to siffer).

b) Vi har

$$Ce^{a(t+T)} = N(t+T) = 2N(t) = 2Ce^{at}$$

Kansellerer vi den felles faktoren Ce^{at}, får vi

$$e^{aT} = 2 \quad \Rightarrow \quad aT = \ln(2) \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{T = \frac{\ln(2)}{a}}}$$

3a) Betegn det ønskede arealet med A_1. Da er

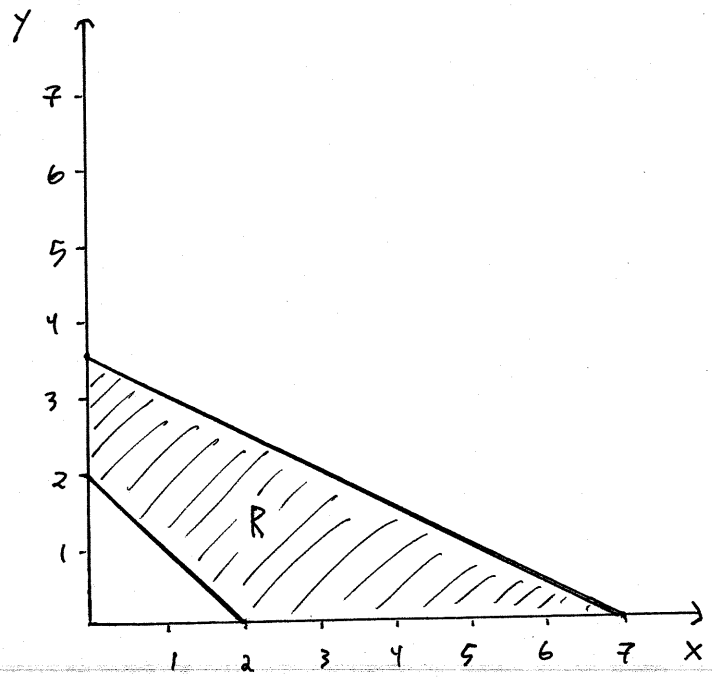
$$\underline{\underline{A_1}} = \int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx = \int_1^2 x^{-2}\,dx = -x^{-1}\Big|_1^2 = -\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{1}\right) = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

b) Betegn det ønskede arealet med A_2. Da er

$$\underline{\underline{A_2}} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b x^{-2}\,dx$$

$$= \lim_{b\to+\infty} -x^{-1}\Big|_1^b = \lim_{b\to+\infty} \left(-\frac{1}{b} - \left(-\frac{1}{1}\right)\right) = \underline{\underline{1}}$$

4a) Vi har



Linja gitt ved $x+2y=7$ krysser x-aksen i $(7,0)$ og y-aksen i $(0, 7/2)$.
Linja gitt ved $x+y=2$ krysser x-aksen i $(2,0)$ og y-aksen i $(0,2)$.

b) R har de fire hjørnene $(2,0)$, $(7,0)$, $(0,7/2)$ og $(0,2)$. $\max(x-y)$ på R antas i et av disse hjørnepunktene. Fra tabellen av verdier ser vi at $\max(x-y) = 7$ på R

(x,y)	$x-y$
$(2,0)$	2
$(7,0)$	7
$(0,7/2)$	$-7/2$
$(0,2)$	-2

5a) Vi har

$$g_x = -y + 2x^3 \qquad g_y = -x + y^3$$

$$g_{xx} = 6x^2 \qquad g_{yy} = 3y^2$$

$$g_{xy} = g_{yx} = -1$$

b) Vi har likningene

$$g_x = -y + 2x^3 = 0 \qquad g_y = -x + y^3 = 0$$

for de kritiske punktene. Det gir

(*) $y = 2x^3$ og $x = y^3$

Innsetting gir

$$y = 2(y^3)^3 = 2y^9.$$

Hvis $y = 0$ så er $x = 0^3 = 0$, og (*) er da oppfylt. Så er $(0,0)$ et kritisk punkt. Hvis $y \neq 0$ så er $1 = 2y^8$ (dele med y). Det gir $y = \pm 2^{-1/8}$. Siden $x = y^3$ gir det punktene $(2^{-3/8}, 2^{-1/8})$ og $(-2^{-3/8}, -2^{-1/8})$, som oppfyller (*) og dermed er kritiske punkter

Vi har $g_{xx}g_{yy} - g_{xy}^2 = 18x^2y^2 - 1$, og ved tabellen til høyre ser vi at $(0,0)$ er sadelpunkt, $(2^{-3/8}, 2^{-1/8})$ lokalt minimumspunkt og $(-2^{-3/8}, -2^{-1/8})$ lokalt minimumspunkt.

krit. pkt.	g_{xx}	$g_{xx}g_{yy} - g_{xy}$
$(0,0)$		$-1 < 0$
$(2^{-3/8}, 2^{-1/8})$	$2^{-6/8} > 0$	$8 > 0$
$(-2^{-3/8}, -2^{-1/8})$	$2^{-6/8} > 0$	$8 > 0$