

EKSAMEN MAT-1004 LINEÆR ALGEBRA (BOKMÅL)

14. Juni 2007 kl 9-13

Kontaktperson:
Martin Rypdal 90175422

Hjelpemiddel: 4 notatsider og kalkulator.

Begrunn alle svar og ta med alle nødvendige mellomregninger i besvarelsen.
Oppgavesettet er på 3 sider.

Oppgave 1

Disse matrisene er gitt:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & -4 \\ 4 & 1 & -3 & -7 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

a) Finn en basis for nullrommet til A og en basis for søylerommet til A . Hva er ranken til matrisen A ?

b) Finn den generelle løsningen av matriselikningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Oppgave 2

I denne oppgaven er disse 2×2 matrisene gitt:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Finn egenverdiene og egenrommene til matrisen P .

b) Bruk resultatet i (a) til å vise at vi for alle hele tall n har

$$P^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^n + (-1)^n & 3^n - (-1)^n \\ 3^n - (-1)^n & 3^n + (-1)^n \end{pmatrix}$$

c) Finn en tilsvarende formel for Q^n .

Oppgave 3

La P_3 være vektorrommet av alle polynom med grad mindre eller lik 3. La

$$V = \{p \in P_3 \mid p(0) = 0\}.$$

a) Vis at V er et underrom av P_3 og angi en basis B i V .

Definer en avbildning $S : P_3 \rightarrow P_3$ ved

$$S(p)(x) = \int_0^x \frac{p(t)}{t} dt.$$

b) Vis at S er lineær og finn matrisen til S med hensyn til basisen B .

Oppgave 4

I denne oppgaven ser vi på en generell 2×2 matrise:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

a) Vis ved direkte utregning at det karakteristiske polynomet til M kan skrives som

$$c_M(x) = x^2 - \operatorname{tr}(M)x + \det(M).$$

Bruk dette resultatet til å vise at $\operatorname{tr}(M) = \lambda_1 + \lambda_2$ og at $\det(M) = \lambda_1 \lambda_2$, der λ_1 og λ_2 er egenverdiene til matrisen M .

La $V = \operatorname{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ være vektorrommet av alle reelle 2×2 matriser, og definer en avbildning $T_M : V \rightarrow V$ ved $T(A) = MA$.

b) Vis at T_M er ei lineær avbildning, angi en basis i V og finn matrisen til T_M med hensyn til denne basisen. (Svaret skal uttrykkes ved hjelp av a, b, c og d .)

c) Redegjør for sammenhengen mellom egenverdiene til matrisen M og egenverdiene til avbildningen T_M .

Oppgave 5

La $W \subset \mathbb{R}^4$ være hyperplanet gitt ved likningen $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$.

- a) Finn en basis i W . Hva er dimensjonen til W ?
- b) Forklar kort hvordan du vil gå fram for å finne en ortonormal basis i W .

La A være en reell symmetrisk 4×4 matrise og definer en avbildning $T : W \rightarrow W$ ved $T(\mathbf{v}) = \text{proj}_W(A\mathbf{v})$.

- c) Vis at egenverdiene til avbildningen T er reelle.