Universitetet i Tromsø

Institutt for Matematikk og Statistikk

Eksamen i:	MAT-2100 Kompleks analyse
Eksamensdag:	6. juni 2007
Tid for eksamen:	09.00 - 13.00
Sted for eksamen:	Åsgårdveien 9
Tillatte hjelpemiddel:	Rottmanns tabeller, to A4-ark med egne håndskrevne eller trykte notater, og kalkulator.

Kontaktperson under eksamen: Marius Overholt - 95423735/77644022

Settet består av 3 oppgaver på tre sider.

ALLE SVAR SKAL BEGRUNNES - VIS MELLOMREGNINGER.

Oppgave 1

a) Gitt området $\mathbb{D}$ i det komplekse planet gitt ved ulikheten $|z| < 1$. Formuler to forskjellige sett av nødvendige og tilstrekkelige betingelser for at en funksjon $f(z)$ skal være holomorf i $\mathbb{D}$. Her er det nok at du presist formulerer betingelsene du har valgt; du er ikke bedt om å gi noen bevis.

b) En kompleks funksjon $g(z)$ av en kompleks variabel er definert på $\mathbb{D}$. Det er oppgitt at

$$\lim_{z\to 0} \frac{|g(z)|}{|z|} = 0$$

men at

$$\lim_{z\to 0} \frac{|g(z)|}{|z|^{3/2}} = +\infty\,.$$

Begrunn at $g(z)$ ikke kan være holomorf overalt i $\mathbb{D}$.

c) Tell antall nullpunkter (med multiplisitet) som polynomet

$$p(z) = z^3 + z^2 + 3$$

har innenfor sirkelen $|z| = 2$.

Oppgave 2

a) Regn ut integralet

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{3 + \cos(x)}$$

ved residyeregning.

b) Regn ut integralet

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{4 + x^4}$$

ved residyeregning.

c) Regn ut integralet

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)\, dx}{4 + x^4}$$

ved residyeregning.

Oppgave 3

a) Finn singularitetene i det komplekse planet, angi deres type og regn ut deres residyer, for funksjonen $\tan(z)$.

b) Påvis at $\tan(z)$ aldri antar verdiene $\pm i$ i noe punkt i det komplekse planet.

c) Gitt differensiallikningen

$$w''(z) - \tan(z)w'(z) + \tan^2(z)w(z) = 0$$

i det (endelige) komplekse planet. Finn singularitetene til differensiallikningen og klassifiser dem i regulære eller irregulære. Det følger av Frobenius' metode at differensiallikningen har rekkeløsninger på form

$$w(z) = \left(z - \frac{(2k+1)\pi}{2}\right)^{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(z - \frac{(2k+1)\pi}{2}\right)^{n}$$

i punkterte disker med senter i punktene $z = (2k+1)\pi/2$ for heltallsverdier av k . Hvilke verdier kan parameteren α ta i disse rekkeløsningene? Angi konvergensområdet til hver rekkeutvikling av denne formen med senter i $z = \pi/2$. Begrunn at det finnes en punktert disk med senter i $z = \pi/2$ hvorpå alle løsningene til differensiallikningen er lineærkombinasjoner av to gitte rekkeløsninger på denne formen.

d) Funksjonen $f(z)$ er gitt ved

$$f(z) = \frac{\tan(\sqrt{z})}{\sqrt{z}}$$

på den punkterte disken $0 < |z| < \pi^2/4$. Begrunn at $f(z)$ er en entydig holomorf funksjon på tross av at $\sqrt{z}$ er flertydig. Begrunn også at $z = 0$ er en hevbar singularitet til $f(z)$. Regn ut de to første leddene i potensrekkeutviklingen til $f(z)$ med senter i origo.