



Eksamen i : **MAT-2200**

Eksamensdato : **15.6-2007**

Tid : **0900-1300**

Sted : **Åsgårdveien 9.**

Hjelpemidler : **Rottmanns tabeller; 2 A4-ark med**
håndskrevne notater på begge sider;
godkjent kalkulator.

Oppgavesettet er på 4 sider inkl. forside

Kontaktperson under eksamen: Einar Mjølhus, tlf. 776 44013.

Oppgave 1.

a) Løs startverdi problemet

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x(1-x) \\ x(0) &= a\end{aligned}$$

der $a > 0$. Vi noterer denne løsningen som $x(t, a)$.

b) Påvis at $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t, a)$ eksisterer, og finn denne grensen. Er dette gyldig også når $a < 0$?

c) Finn alle likevektspunkt for differensialligningen

$$\frac{dx}{dt} = \sin x,$$

og avgjør deres stabilitet. Ligningen skal ikke løses.

Oppgave 2.

La funksjonen $F : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ være definert ved:

$$F(s) = \pi - s, \quad s \in (0, \pi)$$

$$F(0) = 0$$

$$F \text{ odde,}$$

$$F \text{ } 2\pi\text{-periodisk.}$$

- a) Finn Fourier-rekke til F . Skisser også grafen til F i $s \in (-\pi, \pi)$.
- b) Konvergerer rekke mot F ? Konvergerer den uniformt? Begrunn svarene kort.
- c) Temperaturen $T(t, x)$ i en stav med lengde L oppfyller differensialligningen

$$(2.1) \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

I tida $t < 0$ holdes temperaturen i staven på samme verdi T_0 ved at termostater er i kontakt med endepunktene $x = 0$ og $x = L$. Ved $t = 0$ endres temperaturen i det ene endepunktet $x = 0$ til T_1 . Randbetingelsene for $t \geq 0$ er altså

$$(2.2) \quad \begin{aligned} T(t, 0) &= T_1 \\ T(t, L) &= T_0 \end{aligned}$$

Finn temperaturutviklingen $T(t, x)$ i staven for $t > 0$, $0 < x < L$. Vink: Man kan bestemme den stasjonære temperaturprofilen $\hat{T}(x)$ som oppfyller (2.1), (2.2) samt $\partial \hat{T} / \partial t = 0$. Så kan man bestemme startbetingelse, randbetingelser og ligning for $u(t, x) = T(t, x) - \hat{T}(x)$ og løse dette problemet ved hjelp av Fourier-rekke. Siden T og $\hat{T}$ oppfyller samme randbetingelser, vil u oppfylle homogene randbetingelser.

Oppgave 3

Systemet av differensialligninger

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax - y \\ \frac{dy}{dt} &= x - ay \end{aligned}$$

er gitt, der a er en reell parameter.

a) Forklar hva som menes med:

(i) Origo er et likevektspunkt for (3.1).

(ii) Origo er ustabilt.

(iii) Origo er stabilt.

Drøft stabiliteten av origo for systemet (3.1) for reelle a .

b) La $|a| < 1$. Løs startverdiproblemet $x(0) = 0$, $y(0) = 1$ for (3.1). Uttrykk svaret ved reelle funksjoner.

c) Integralkurvene for (3.1) kan finnes ved hjelp av differensialligningen

$$(3.2) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x - ay}{ax - y}.$$

Påvis at (3.2) er eksakt, og integrer (3.2) opp til formen

$$(3.3) \quad \phi(x, y) = C.$$

d) Skisser faseportrettet for (3.1) når $a = 5/4$. Oppgaven kan løses enten ved hjelp av (3.3) eller på annen måte.