



Eksamen i : **MAT-2201**

Eksamensdato : **8. juni 2007**

Tid : **0900 - 1300**

Sted : **Åsgårdveien 9**

Hjelpemidler : **Rottmanns tabeller; 2 A4-ark med**
håndskrevne notater på begge sider;
godkjent kalkulator.

Oppgavesettet er på 6 sider inkl. forside

Kontaktperson under eksamen: Einar Mjølhus, tlf. 776 44013.

Oppgave 1.

I en datamaskin som vi skal kalle Marc-32, er flyt-tall i enkel presisjon representert på binær form ved 32 bit, der 1 bit inneholder fortegnet, 8 bit inneholder eksponenten og 23 bit inneholder mantissen. Mantissen har formen $(1.b_1 \dots b_{23})_2$. For ethvert reelt tall r , er $fl(r)$ det flyt-tallet som er nærmest r .

a) Hva er den minst mulige *positive* verdien av

$$g(x) = fl(x) - 2, \quad x \in \mathbf{R}?$$

b) En industriell matematiker, Marit, skriver program for Marc-32, hvor hun må beregne

$$(1.1) \quad y = \sqrt{4 + x^2} - 2.$$

Marit er dessverre for dårlig utdannet, og oppdager til sin forskrekkelse at de beregnede verdier av y blir 0 for små verdier av x . Hun er imidlertid ikke rådløs, og finner etter litt omtanke ut hva hun må gjøre. Bestem en verdi $r_c > 0$ slik at (1.1), programmert slik den står, vil gi $y = 0$ for $|x| < r_c$. Foreslå også en alternativ beregningsmåte som vil gi Marit gode tilnærminger til y for $|x| < r_c$.

c) Marit må beregne den deriverte av en funksjon f i sitt program. Hun vil da bruke formelen

$$Df(x, h) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

til å tilnærme $f'(x)$. Hun har grunn til å gå ut fra at f har deriverte til alle ordener.

Utleed et uttrykk for trunkeringsfeilen

$$E(f, x, h) = f'(x) - Df(x, h).$$

d) I følge resultatet fra c), skulle man tro at man kan gjøre feilen så liten man vil, ved å velge h tilstrekkelig liten. Men Marit har gjort sine erfaringer, og hun vet nå at så ikke er tilfelle. Forklar hvorfor. Utleed også for hvilke verdier av h (størrelsesorden) man får den beste tilnærmingen, og angi størrelsesorden på feilen. Begrunn svaret.

Oppgave 2.

a) Bestem en LU -faktorisering av matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

b) Løs ligningssystemet

$$Ax = b$$

der

$$b = \begin{bmatrix} 12 \\ 22 \\ 28 \end{bmatrix}$$

ved hjelp av LU -faktoriseringen av A .

c) Bestem en QR -faktorisering av A , d. v. s.

$$A = QR = [q_1 \mid q_2 \mid q_3] \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & 0 & r_{33} \end{bmatrix}$$

der kolonnene i Q er ortonormale vektorer.

Oppgave 3.

La $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbf{R}^m$, $x \in \mathbf{R}^n$ der m kan være større enn n .

a) Forklar hva som menes med minste kvadraters løsning (least squares solution) av ligningssystemet

$$Ax = b.$$

b) La minste kvadraters løsning betegnes ved $\tilde{x}$. Vis at den må oppfylle

$$A^T A \tilde{x} = A^T b,$$

der A^T betegner den transponerte av A .

c) Vis at minste kvadraters løsning kan beregnes ved hjelp av

$$R \tilde{x} = Q^T b$$

der $A = QR$ er en QR -faktorisering av A . Kommenter fordelen med dette.

Oppgave 4.

a) Finn et 2.-grads polynom som interpolerer $\sin x$ i punktene $x = 0, \pi/2$, og π .

Forklar hvorfor det bare kan finnes ett slikt polynom.

b) Vi ønsker å utlede en formel for numerisk tilnærming til integralet

$$(4.1) \quad \int_{-h}^h f(x) dx$$

ved å erstatte f med et 2. grads polynom som interpolerer f i punktene $-h, 0$ og h .

Skriv opp dette polynomet $P_2(x)$, og utled en tilnærmet formel for integrasjonen

(4.1) ved å beregne

$$(4.2) \quad \int_{-h}^h P_2(x) dx$$

Hva kalles denne formelen?

c) Simpsons formel for å tilnærme (4.1) er

$$\int_{-h}^h f(x) dx = \frac{1}{3} h [f(-h) + 4f(0) + f(h)] + E$$

der E er den lokale feilen. Hva menes med at en integrasjonsformel har grad av presisjon (degree of precision) p ? Hvilken grad av presisjon har Simpsons formel? Begrunn svaret.

d) Påstand: Dersom en integrasjonsformel har grad av nøyaktighet p , så vil den lokale feilen oppfylle

$$|E| \leq Ch^{p+2}$$

for en konstant C som er uavhengig av h når $h \rightarrow 0$. Vis at dette er tilfellet for Simpsons formel, forutsatt at f er tilstrekkelig mange ganger deriverbar. Beviset kan baseres på Taylors formel.