



EKSAMENSOPPGAVE I STA-1002

Eksamen i : **STA-1002 Statistikk og sannsynlighet 2**

Eksamensdato : **Torsdag 14. juni 2007**

Tid : **Kl 09:00-13:00**

Sted : **Åsgårdveien 9**

Tillatte hjelpemidler : **To A4 ark (4 sider) med notater samt
godkjent kalkulator**

Oppgavesettet er på 12 sider inkl. forside og tabeller

Kontaktperson under eksamen: Amanuensis Elinor Ytterstad, tlf 77 64 4015

Normalfordelingen: $X \sim N(\mu, \sigma)$; $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$

t-fordelingen: $f(t) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})\sqrt{\pi\nu}} \left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{-(\nu+1)/2}$

OPPGAVE 1

En 3500 år gammel Egyptisk beinterning er kastet 235 ganger og resultatet ble:

Side nummer	1	2	3	4	5	6
Observert frekvens	37	17	49	59	28	45

- a) Sett opp passende hypoteser og test om terningen er rettferdig dvs. alle sidene har samme sannsynlighet.
Hva blir testkonklusjonen, bruk 5% signifikansnivå.

OPPGAVE 2

La $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ være uavhengige tilfeldige variable fra normalfordelinger der $Y_i \sim N(c_i \mu, \sigma)$ og c_i er kjente konstanter.

- Utlede sannsynlighetsmaksimeringsestimatorene for μ og σ^2
- Er dette en lineær regresjonsmodell? Forklar hvorfor eller eventuelt hvorfor ikke. Utlede minste kvadraters estimator for μ .
- Anta kjent σ , og at μ har apriorifordelingen $N(\mu_0, 1)$, der μ_0 også er kjent.

Vis at aposteriorifordelingen til μ er:

$$\pi(\mu | y_1, y_2, \dots, y_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{a + \sigma^2}}{\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \left(a + \sigma^2 \left(\mu - \frac{ax + \sigma^2 \mu_0}{a + \sigma^2} \right)^2 \right)}$$

der $x = \frac{\sum_{i=1}^n c_i y_i}{a}$ og $a = \sum_{i=1}^n c_i^2$

I utledningen av fordelingen over kan du bruke at:

$$\sum (y_i - c_i \mu)^2 = \sum (y_i - c_i x)^2 + (x - \mu)^2 \sum c_i^2 = \sum (y_i - c_i x)^2 + (x - \mu)^2 a$$

og

$$\frac{a}{\sigma^2} (x - \mu)^2 + (\mu - \mu_0)^2 = \frac{a + \sigma^2}{\sigma^2} \left(\mu - \frac{ax + \sigma^2 \mu_0}{a + \sigma^2} \right)^2 + K$$

der K er en konstant som funksjon av μ

Hva blir Bayes-estimatoren for μ ?

OPPGAVE 3

Grunnlaget for denne oppgaven er et datamateriale fra 54 pasienter som er operert for nærsynthet. Den kirurgiske metoden går ut å minske hornhinnens krumning og dermed redusere nærsyntheten. Vi har følgende variabler i materialet:

X_1 = nærsynthet før inngrepet (negative verdier hvis nærsynt, positive verdier hvis langsynt)

Y = forandringen i nærsynthet etter det kirurgiske inngrepet

X_2 = hornhinnens krumning før inngrepet

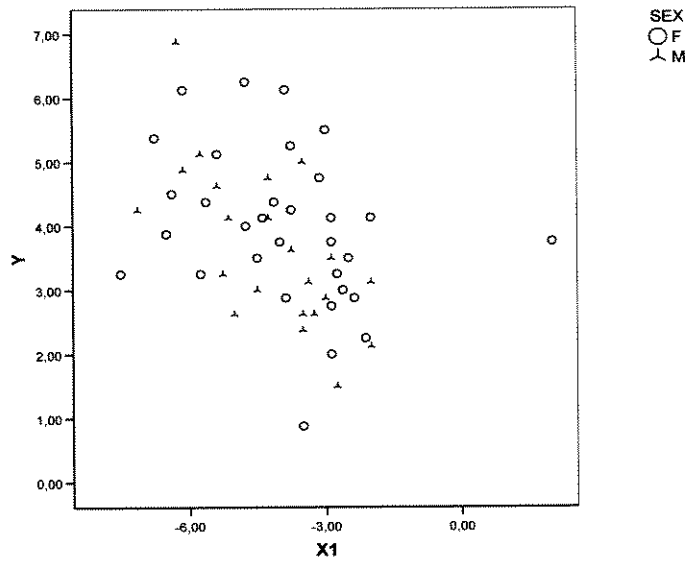
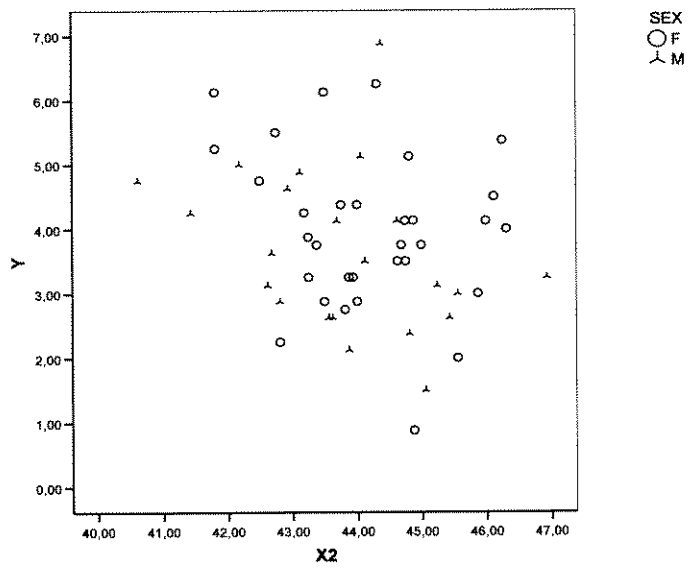
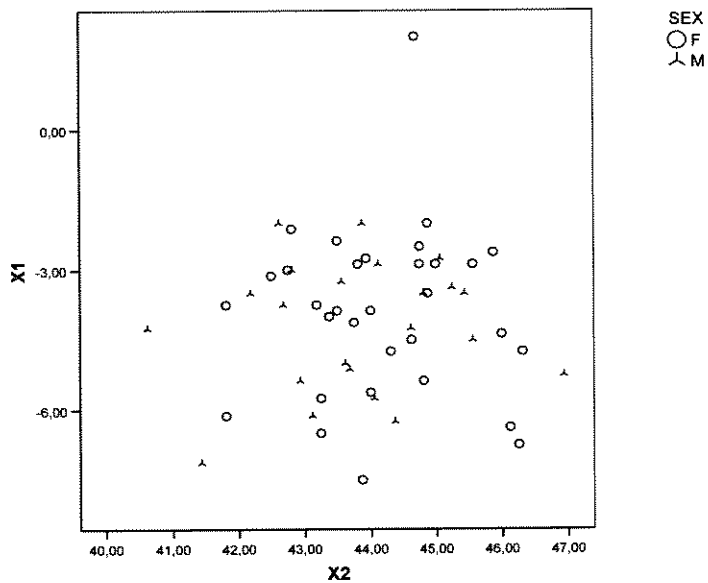
X_3 = pasientens kjønn, 1 for kvinne og 0 for mann

Alle unntatt en pasient var nærsynt før inngrepet.

- a) Skriv opp en lineær regresjonsmodell med Y som avhengig variabelen. Modellen skal inkludere separate lineære modeller for hvert kjønn. Skriv opp forutsetningene for regresjonsmodellen?
- b) Beskriv stepwise-prosedyren for utvelging av beste modell. Bruk vedlagte utskrifter fra SPSS og finn variabelen som stepwise-prosedyren tar inn først i modellen.

Vi skal undersøke i alt åtte modeller nummerert fra 1 til 8 i alle vedlagte utskrifter fra SPSS.

- c) Test hypotesen $H_0 : \beta_2 = 0$ i modell 3.
Hva blir konklusjonen på 5 % signifikansnivå?
Regn også ut et 95% konfidensintervall for β_2 .
Skriv opp ANOVA-tabellen for modell 6.
Test hypotesen $H_0 : \beta_2 = \beta_3 = 0$ i modell 6, bruk 5% signifikansnivå.
- d) Hvilken modell vil du velge som beste modell? Begrunn svaret.
- e) Kommenter residualene og leverage-verdiene h_{ii} i vedlagte spredningsplott for modell 3. Er det uteliggere i materialet? Begrunn.
En av de vedlagte tabellene fra SPSS viser analyseresultater når observasjon nr 8 (pasienten med $x_1 > 0$) er fjernet fra materialet.
Kommenter endringen i resultat fra analysen med alle 54 pasienter.



DET MATEMATISK-NATURVITENSKAPELIGE FAKULTET

Universitetet i Tromsø, N-9037 Tromsø, Telefon 77 64 40 01, Telefaks 77 64 47 65

Resultater av regresjonsanalyser for åtte ulike modeller
SSY=80,253

modell	Uavhengige variable	R ²	MSE	Mallow's C _p Modell 8 som full modell	Mallow's C _p Modell 6 som full modell	Antall parametre
1	x1	0,163	1,291	8,02	6,56	2
2	x2	0,065	1,443	14,85	13,21	2
3	x1, x2	0,220	1,228	6,13	4,761	3
4	x1, x3	0,191	1,274	8,16	6,74	3
5	x2, x3	0,093	1,427	14,90	13,31	3
6	x1, x2, x3	0,260	1,187	5,30	4	4
7	x1, x3, x3x1	0,245	1,212	6,38		4
8	x1, x2, x3, x3x1, x3x2	0,308	1,157	6		6

De uavhengige variablene x3x1 og x3x2 er interaksjoner mellom hhv x₃, x₁ og mellom x₃, x₂

Correlations

		Y	X1	X2
Y	Pearson Correlation	1	-,404**	-,254
	Sig. (2-tailed)		,002	,063
	N	54	54	54
X1	Pearson Correlation	-,404**	1	,042
	Sig. (2-tailed)	,002		,761
	N	54	54	54
X2	Pearson Correlation	-,254	,042	1
	Sig. (2-tailed)	,063	,761	
	N	54	54	54

** . Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

Coefficients^a

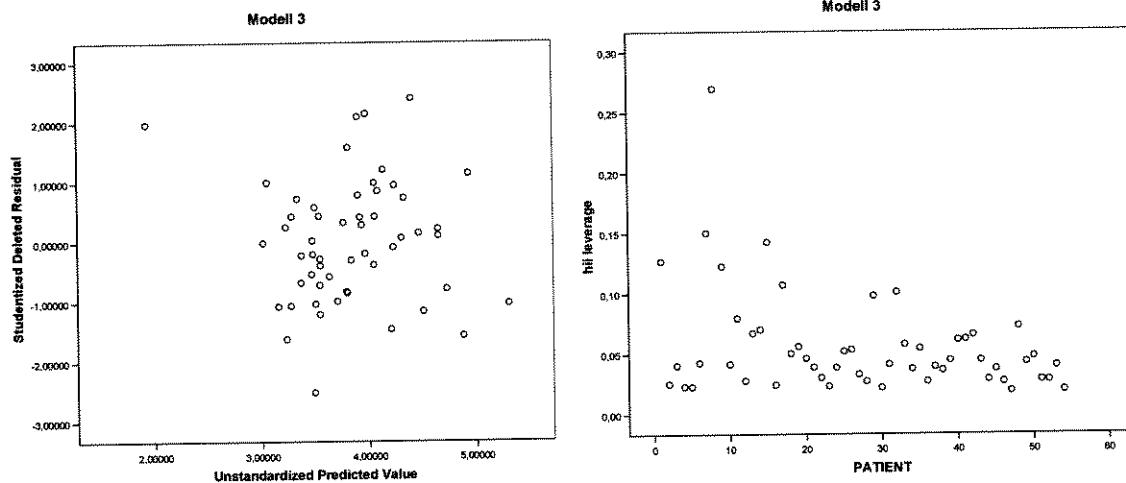
Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	2,627	,409		6,424	,000
	X1	-,299	,094	-,404	-3,185	,002
3	(Constant)	12,360	5,086		2,430	,019
	X1	-,292	,092	-,394	-3,182	,002
	X2	-,220	,115	-,238	-1,919	,061
6	(Constant)	13,211	5,027		2,628	,011
	X1	-,304	,090	-,410	-3,360	,001
	X2	-,248	,114	-,267	-2,171	,035
	X3	,509	,306	,205	1,662	,103

a. Dependent Variable: Y

Coefficients^a

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
8	(Constant)	12,151	7,183		1,692	,097
	X1	-,561	,168	-,757	-3,329	,002
	X2	-,248	,162	-,268	-1,535	,131
	X3	,914	10,011	,368	,091	,928
	X3X1	,358	,199	,697	1,804	,077
	X3X2	,024	,226	,432	,107	,915

a. Dependent Variable: Y



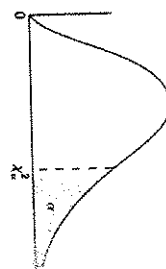
Leverage-verdiene h_{ii} er som definert i læreboka

Resultat av stepwise-prosedyren på de 53 nærsynte:

Coefficients datamaterialet er redusert til de 53 nærsynte før inngrepet

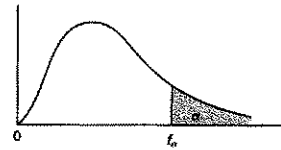
Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	2,194	,467		4,701	,000
	X1	-,396	,106	-,462	-3,720	,000
3	(Constant)	12,441	4,947		2,515	,015
	X1	-,394	,103	-,460	-3,821	,000
	X2	-,233	,112	-,250	-2,080	,043

a. Dependent Variable: Y



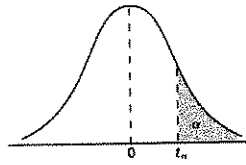
Critical Values of the Chi-Squared Distribution

Critical Values of the Chi-Squared Distribution																				
ν	α																			
	0.995	0.99	0.98	0.975	0.95	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40	0.30	0.20	0.10	0.05	0.025	0.02	0.01	0.005	0.001
1	0.00393	0.0157	0.0262	0.0382	0.0539	0.0758	0.1038	0.1496	0.2009	0.2518	0.3082	0.3619	0.4190	0.4795	0.5428	0.6065	0.6742	0.7460	0.8190	0.9000
2	0.01000	0.0201	0.0400	0.0506	0.0703	0.0905	0.1107	0.1309	0.1509	0.1709	0.1909	0.2109	0.2309	0.2509	0.2709	0.2909	0.3109	0.3309	0.3509	0.3709
3	0.07717	0.115	0.185	0.216	0.260	0.318	0.381	0.449	0.520	0.594	0.671	0.750	0.831	0.914	1.000	1.089	1.181	1.276	1.374	1.475
4	0.207	0.297	0.429	0.484	0.562	0.658	0.761	0.870	0.985	1.106	1.233	1.367	1.507	1.652	1.803	1.960	2.123	2.292	2.467	2.648
5	0.412	0.554	0.752	0.831	0.935	1.055	1.181	1.314	1.454	1.601	1.754	1.914	2.081	2.255	2.436	2.624	2.819	3.021	3.230	3.447
6	0.676	0.872	1.134	1.237	1.355	1.481	1.614	1.754	1.901	2.054	2.214	2.381	2.554	2.733	2.918	3.109	3.306	3.509	3.718	3.933
7	0.989	1.239	1.564	1.690	1.827	1.969	2.117	2.271	2.431	2.596	2.766	2.941	3.121	3.306	3.496	3.691	3.891	4.096	4.306	4.521
8	1.344	1.646	2.032	2.180	2.332	2.490	2.653	2.821	2.994	3.171	3.353	3.540	3.731	3.926	4.125	4.328	4.535	4.746	4.961	5.180
9	1.735	2.088	2.532	2.700	2.872	3.049	3.231	3.417	3.607	3.800	3.996	4.195	4.397	4.601	4.808	5.018	5.231	5.447	5.666	5.888
10	2.156	2.558	3.059	3.247	3.440	3.637	3.837	4.040	4.245	4.452	4.661	4.872	5.085	5.299	5.515	5.732	5.951	6.172	6.395	6.620
11	2.603	3.053	3.609	3.816	4.026	4.239	4.454	4.671	4.890	5.110	5.331	5.553	5.776	6.000	6.225	6.451	6.678	6.906	7.135	7.365
12	3.074	3.571	4.178	4.404	4.632	4.861	5.091	5.322	5.553	5.785	6.017	6.250	6.483	6.716	6.950	7.184	7.418	7.653	7.888	8.124
13	3.565	4.107	4.765	4.975	5.190	5.410	5.634	5.862	6.091	6.321	6.551	6.781	7.011	7.241	7.471	7.701	7.931	8.161	8.391	8.621
14	4.075	4.660	5.368	5.569	5.774	5.983	6.193	6.403	6.613	6.823	7.033	7.243	7.453	7.663	7.873	8.083	8.293	8.503	8.713	8.923
15	4.601	5.229	5.985	6.182	6.390	6.600	6.810	7.020	7.230	7.440	7.650	7.860	8.070	8.280	8.490	8.700	8.910	9.120	9.330	9.540
16	5.142	5.812	6.614	6.808	7.016	7.225	7.434	7.643	7.852	8.061	8.270	8.479	8.688	8.897	9.106	9.315	9.524	9.733	9.942	10.151
17	5.697	6.408	7.255	7.448	7.655	7.862	8.069	8.276	8.483	8.690	8.897	9.104	9.311	9.518	9.725	9.932	10.139	10.346	10.553	10.760
18	6.265	7.015	7.906	8.097	8.299	8.500	8.701	8.902	9.103	9.304	9.505	9.706	9.907	10.108	10.309	10.510	10.711	10.912	11.113	11.314
19	6.844	7.633	8.567	8.757	8.957	9.157	9.357	9.557	9.757	9.957	10.157	10.357	10.557	10.757	10.957	11.157	11.357	11.557	11.757	11.957
20	7.434	8.260	9.237	9.426	9.625	9.824	10.023	10.222	10.421	10.620	10.819	11.018	11.217	11.416	11.615	11.814	12.013	12.212	12.411	12.610
21	8.034	8.897	9.915	10.103	10.291	10.479	10.667	10.855	11.043	11.231	11.419	11.607	11.795	11.983	12.171	12.359	12.547	12.735	12.923	13.111
22	8.643	9.542	10.600	10.787	10.974	11.161	11.348	11.535	11.722	11.909	12.096	12.283	12.470	12.657	12.844	13.031	13.218	13.405	13.592	13.779
23	9.260	10.196	11.293	11.479	11.665	11.851	12.037	12.223	12.409	12.595	12.781	12.967	13.153	13.339	13.525	13.711	13.897	14.083	14.269	14.455
24	9.886	10.856	11.992	12.177	12.362	12.547	12.732	12.917	13.102	13.287	13.472	13.657	13.842	14.027	14.212	14.397	14.582	14.767	14.952	15.137
25	10.520	11.524	12.697	12.881	13.065	13.249	13.433	13.617	13.801	13.985	14.169	14.353	14.537	14.721	14.905	15.089	15.273	15.457	15.641	15.825
26	11.160	12.198	13.409	13.592	13.775	13.958	14.141	14.324	14.507	14.690	14.873	15.056	15.239	15.422	15.605	15.788	15.971	16.154	16.337	16.520
27	11.808	12.879	14.125	14.307	14.489	14.671	14.853	15.035	15.217	15.399	15.581	15.763	15.945	16.127	16.309	16.491	16.673	16.855	17.037	17.219
28	12.461	13.565	14.847	15.028	15.209	15.390	15.571	15.752	15.933	16.114	16.295	16.476	16.657	16.838	17.019	17.200	17.381	17.562	17.743	17.924
29	13.121	14.256	15.574	15.754	15.934	16.114	16.294	16.474	16.654	16.834	17.014	17.194	17.374	17.554	17.734	17.914	18.094	18.274	18.454	18.634
30	13.787	14.953	16.306	16.485	16.664	16.843	17.022	17.201	17.380	17.559	17.738	17.917	18.096	18.275	18.454	18.633	18.812	18.991	19.170	19.349



Critical Values of the F-Distribution

		$f_{0.05}(v_1, v_2)$								
		v_1								
v_2		1	2	3	4	5	6	7	8	9
1		161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	236.8	238.9	240.5
2		18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38
3		10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81
4		7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00
5		6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77
6		5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10
7		5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68
8		5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39
9		5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18
10		4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02
11		4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90
12		4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80
13		4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71
14		4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65
15		4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59
16		4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54
17		4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49
18		4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46
19		4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42
20		4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39
21		4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37
22		4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34
23		4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32
24		4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30
25		4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28
26		4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27
27		4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25
28		4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24
29		4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22
30		4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21
40		4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12
60		4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04
120		3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.17	2.09	2.02	1.96
∞		3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88

t-fordeling

Critical Values of the t-Distribution

<i>v</i>	α						
	0.40	0.30	0.20	0.15	0.10	0.05	0.025
1	0.325	0.727	1.376	1.963	3.078	6.314	12.706
2	0.289	0.617	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303
3	0.277	0.584	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182
4	0.271	0.569	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776
5	0.267	0.559	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571
6	0.265	0.553	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447
7	0.263	0.549	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365
8	0.262	0.546	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306
9	0.261	0.543	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262
10	0.260	0.542	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228
11	0.260	0.540	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201
12	0.259	0.539	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179
13	0.259	0.537	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160
14	0.258	0.537	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145
15	0.258	0.536	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131
16	0.258	0.535	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120
17	0.257	0.534	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110
18	0.257	0.534	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101
19	0.257	0.533	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093
20	0.257	0.533	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086
21	0.257	0.532	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080
22	0.256	0.532	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074
23	0.256	0.532	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069
24	0.256	0.531	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064
25	0.256	0.531	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060
26	0.256	0.531	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056
27	0.256	0.531	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052
28	0.256	0.530	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048
29	0.256	0.530	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045
30	0.256	0.530	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042
40	0.255	0.529	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021
60	0.254	0.527	0.848	1.045	1.296	1.671	2.000
120	0.254	0.526	0.845	1.041	1.289	1.658	1.980
∞	0.253	0.524	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960

t-fordeling, fortsetter

(continued) Critical Values of the <i>t</i> -Distribution							
<i>v</i>	α						
	0.02	0.015	0.01	0.0075	0.005	0.0025	0.0005
1	15.895	21.205	31.821	42.434	63.657	127.322	636.590
2	4.849	5.643	6.965	8.073	9.925	14.089	31.598
3	3.482	3.896	4.541	5.047	5.841	7.453	12.924
4	2.999	3.298	3.747	4.088	4.604	5.598	8.610
5	2.757	3.003	3.365	3.634	4.032	4.773	6.869
6	2.612	2.829	3.143	3.372	3.707	4.317	5.959
7	2.517	2.715	2.998	3.203	3.499	4.029	5.408
8	2.449	2.634	2.896	3.085	3.355	3.833	5.041
9	2.398	2.574	2.821	2.998	3.250	3.690	4.781
10	2.359	2.527	2.764	2.932	3.169	3.581	4.587
11	2.328	2.491	2.718	2.879	3.106	3.497	4.437
12	2.303	2.461	2.681	2.836	3.055	3.428	4.318
13	2.282	2.436	2.650	2.801	3.012	3.372	4.221
14	2.264	2.415	2.624	2.771	2.977	3.326	4.140
15	2.249	2.397	2.602	2.746	2.947	3.286	4.073
16	2.235	2.382	2.583	2.724	2.921	3.252	4.015
17	2.224	2.368	2.567	2.706	2.898	3.222	3.965
18	2.214	2.356	2.552	2.689	2.878	3.197	3.922
19	2.205	2.346	2.539	2.674	2.861	3.174	3.883
20	2.197	2.336	2.528	2.661	2.845	3.153	3.849
21	2.189	2.328	2.518	2.649	2.831	3.135	3.819
22	2.183	2.320	2.508	2.639	2.819	3.119	3.792
23	2.177	2.313	2.500	2.629	2.807	3.104	3.768
24	2.172	2.307	2.492	2.620	2.797	3.091	3.745
25	2.167	2.301	2.485	2.612	2.787	3.078	3.725
26	2.162	2.296	2.479	2.605	2.779	3.067	3.707
27	2.158	2.291	2.473	2.598	2.771	3.057	3.690
28	2.154	2.286	2.467	2.592	2.763	3.047	3.674
29	2.150	2.282	2.462	2.586	2.756	3.038	3.659
30	2.147	2.278	2.457	2.581	2.750	3.030	3.646
40	2.125	2.250	2.423	2.542	2.704	2.971	3.551
60	2.099	2.223	2.390	2.504	2.660	2.915	3.460
120	2.076	2.196	2.358	2.468	2.617	2.860	3.373
∞	2.054	2.170	2.326	2.432	2.576	2.807	3.291