Nynorsk

Eksamen MAT-1004 Lineær Algebra (nynorsk)

14. Juni 2007 kl 9-13

Kontaktperson:
Martin Rypdal 90175422

Hjelpemidel: 4 notatsider og kalkulator.

Grunngje alle svar og ta med alle nødvendige mellomrekningar i løysinga.
Oppgåva er på 3 sider.

Oppgåve 1

Disse matrisene er gitt:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & -4 \\ 4 & 1 & -3 & -7 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

a) Finn ein basis for nullrommet til A og ein basis for søylerommet til A. Kva er ranken til matrisa A?

b) Finn den generelle løysninga av matriselikninga $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Oppgåve 2

I denne oppgåva er disse 2×2 matrisene gitt:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Finn egenverdiane og egenromma til matrisa P.

b) Bruk resultatet i **(a)** til å vise at vi for alle heile tal n har

$$P^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^n + (-1)^n & 3^n - (-1)^n \\ 3^n - (-1)^n & 3^n + (-1)^n \end{pmatrix}$$

c) Finn ein tilsvarande formel for Q^n.

Nynorsk .

Oppgåve 3

La P_3 vere vektorrommet av alle polynom med grad mindre eller lik 3. La

$$V = \{p \in P_3 \,|\, p(0) = 0\}\,.$$

a) Vis at V er et underrom av P_3 og angi ein basis B i V.

Definer ei avbilding $S : P_3 \to P_3$ ved

$$S(p)(x) = \int_0^x \frac{p(t)}{t}\,dt\,.$$

b) Vis at S er lineær og finn matrisa til S med omsyn til basisen B.

Oppgåve 4

I denne oppgåva ser vi på ei generell 2×2 matrise:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

a) Vis ved direkte utrekning at det karakteristiske polynomet til M kan skrives som

$$c_M(x) = x^2 - \mathrm{tr}(M)\,x + \det(M)\,.$$

Bruk dette resultatet til å vise at $\mathrm{tr}(M) = \lambda_1 + \lambda_2$ og at $\det(M) = \lambda_1\lambda_2$, der λ_1 og λ_2 er egenverdiane til matrisa M.

La $V = \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ vere vektorrommet av alle reelle 2×2 matriser, og definer ei avbilding $T_M : V \to V$ ved $T(A) = MA$.

b) Vis at T_M er ei lineær avbilding, angi ein basis i V og finn matrisa til T_M med omsyn til denne basisen. (Svaret skal uttrykkast ved hjelp av a,b,c og d.)

c) Gjør greie for samanhengen mellom egenverdiane til matrisa M og egenverdiane til avbildinga T_M.

Nynorsk

Oppgåve 5

La $W \subset \mathbb{R}^4$ være hyperplanet gitt ved likninga $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$.

a) Finn ein basis i W. Kva er dimensjonen til W?

b) Forklar kort korleis du vil gå fram for å finne ein ortonormal basis i W.

La A være ei reell symmetrisk 4×4 matrise og definer ei avbilding $T : W \to W$ ved $T(\mathbf{v}) = \text{proj}_W(A\mathbf{v})$.

c) Vis at egenverdiane til avbildinga T er reelle.