



Nynorsk versjon.

Eksamen i	: MAT-2200
Eksamensdato	: 15.6-2007
Tid	: 0900-1300
Stad	: Åsgårdveien 9.
Hjelpemiddel	: Rottmanns tabellar; 2 A4-ark med handskrivne notat på begge sider; godkjend kalkulator.

Oppgavesettet er på 4 sider inkl. forside

Kontaktperson under eksamen: Einar Mjølhus, tlf. 776 44013.

Oppgave 1.

a) Løys startverdiproblemet

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x(1-x) \\ x(0) &= a\end{aligned}$$

der $a > 0$. Vi noterer denne løysinga som $x(t, a)$.

b) Påvis at $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t, a)$ eksisterer, og finn denne grensa. Er dette gyldig også når $a < 0$?

c) Finn alle likevektspunkt for differensiallikninga

$$\frac{dx}{dt} = \sin x,$$

og avgjer stabiliteten deira. Likninga skal ikkje løysast.

Oppgave 2.

La funksjonen $F : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ vera definert ved:

.

$$F(s) = \pi - s, \quad s \in (0, \pi)$$

$$F(0) = 0$$

$$F \text{ odde,}$$

$$F \text{ } 2\pi\text{-periodisk.}$$

- a) Finn Fourier-rekka til F . Skisser også grafen til F i området $s \in (-\pi, \pi)$.
- b) Konvergerer rekka mot F ? Konvergerer ho uniformt? Gi stutt grunnar for svara.
- c) Temperaturen $T(t, x)$ i ein stav med lengd L oppfyller differensiallikninga

$$(2.1) \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

I tida $t < 0$ blir temperaturen i staven halden på same verd T_0 ved at termostatar er i kontakt med endepunkta $x = 0$ og $x = L$. Ved $t = 0$ blir temperaturen i det eine endepunktet $x = 0$ endra til T_1 . Randvilkåra for $t \geq 0$ er altså

$$(2.2) \quad \begin{aligned} T(t, 0) &= T_1 \\ T(t, L) &= T_0 \end{aligned}$$

Finn temperaturutviklinga $T(t, x)$ i staven for $t > 0$, $0 < x < L$. Vink: Ein kan finna den stasjonære temperaturprofilen $\hat{T}(x)$ som oppfyller (2.1), (2.2) samt $\partial \hat{T} / \partial t = 0$. Så kan ein finna startvilkår, randvilkår og likning for $u(t, x) = T(t, x) - \hat{T}(x)$, og løysa dette problemet ved hjelp av Fourier-rekke. Sidan T og $\hat{T}$ oppfyller same randvilkår, vil u oppfylle homogene randvilkår.

Oppgave 3

Systemet av differensiallikningar

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax - y \\ \frac{dy}{dt} &= x - ay \end{aligned}$$

er gjeve, der a er ein reell parameter.

a) Forklar kva som blir meint med:

(i) Origo er eit likevektspunkt for (3.1).

(ii) Origo er ustabilt.

(iii) Origo er stabilt.

Drøft stabiliteten av origo for systemet (3.1) for reelle a .

b) La $|a| < 1$. Løys startverdiproblemet $x(0) = 0$, $y(0) = 1$ for (3.1). Uttrykk svaret ved reelle funksjonar.

c) Integralkurvene for (3.1) kan finnast ved hjelp av differensiallikninga

$$(3.2) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x - ay}{ax - y}.$$

Påvis at (3.2) er eksakt, og integrer (3.2) opp til forma

$$(3.3) \quad \phi(x, y) = C.$$

d) Skisser faseportrettet for (3.1) når $a = 5/4$. Problemet kan løysast anten ved hjelp av (3.3) eller på annan måte.