EKSAMENSOPPGAVE MAT-1002

Eksamen i	:	**MAT-1002**
Eksamensdato	:	**Onsdag 28. september** 05
Tid	:	**Kl 0900-1300**
Sted	:	**Aud.max., Administrasjonsbygget**
Hjelpemidler	:	**4 sider med notater, kalkulator og formelsamling.**

Oppgavesettet er på 3 sider inkl. forside

Kontaktperson under eksamen: Martin Rypdal, tlf 776 44027

DET MATEMATISK-NATURVITENSKAPELIGE FAKULTET

Universitetet i Tromsø, N-9037 Tromsø, Telefon 77 64 40 01, Telefaks 77 64 47 65

Alle svar skal begrunnes og alle nødvendige mellomregninger skal være med i besvarelsen.

Oppgave 1

La $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være gitt ved $f(x, y) = (x-1)e^{-(x-1)^2-(y-1)^2}$.

a) Finn alle kritiske punkter for funksjonen f. Avgjør om hvert av de kritiske punktene er et lokalt maksimumspunkt, et lokalt minimumspunkt, et sadelpunkt eller et degenerert kritisk punkt.

b) La $a = (0, 1)$ være et punkt i $\mathbb{R}^2$. Finn tangentplanet til grafen til f i punktet a. Beregn avstanden mellom tangentplanet og hvert av de kritiske punktene til funksjonen f.

c) Finn ekstremalverdiene til f på området

$$K = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1\right\}.$$

Kan vi være sikker på at enhver kontinuerlig funksjon definert på K har en maksimumsverdi og en minimumsverdi? Avgjør om f har en maksimumsverdi og en minimumsverdi på området

$$O = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; (x-1)^2 + (y-1)^2 < \frac{1}{2}\right\}.$$

d) La $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være en avbildning gitt ved $(x, y) \mapsto (xy+1, 1)$, og la $h = f \circ g$. (f er funksjonen $f(x, y) = (x-1)e^{-(x-1)^2-(y-1)^2}$). Bruk kjerneregelen til å finne gradienten ∇h i punktet $b = (1, 1)$. Finn første ordens Taylorpolynom for h om punktet b.

Oppgave 2

La $R > 0$ og $\mathbf{r}(t) = R\cos(t)\cos(t)\mathbf{i} + R\cos(t)\sin(t)\mathbf{j} + R\sin(t)\mathbf{k}$ være en parameterframstilling av en kurve i $\mathbb{R}^3$.

a) Vis at $||\mathbf{r}(t)|| = R$ for alle $t \in \mathbb{R}$.

b) Finn parameterframstilling (i kartesiske koordinater) for en todimensjonal flate i $\mathbb{R}^3$ som kurven ligger på. Beskriv denne flaten. Velg et punkt P på flaten, og finn tangentplanet til flaten i dette punktet.

Oppgave 3

a) Avgjør om rekkene konvergerer:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2} \qquad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n)}{n} \qquad 3)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+1}.$$

b) Definer hva det vil si at en følge $\{f_n\}$ av funksjoner konvergerer punktvis til en funksjon f på et område A. Definer også hva det vil si at funksjonsfølgen $\{f_n\}$ konvergerer uniformt til f på A.

c) La $f_n(x) = \arctan(nx)$ være funksjoner på $\mathbb{R}$. Finn den punktvise grensa til funksjonsfølgen $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$. Er konvergensen uniform?

d) Er funksjonen $h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(nx)}{n^2}$ kontinuerlig på $\mathbb{R}$?

Oppgave 4

a) Finn Taylorrekka til $\sin(x)$ om punktet $a = 0$.

b) Bruk resultatet **(a)** til å vise at $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(2n+1)}$.

c) Bruk potensrekker til å finne en funksjon $f(x)$ som oppfyller

$$f''(x) = -f(x) \ , \ \ f(0) = 0 \ , \ \ f'(0) = 1 \, .$$