Eksamen i	:	**MAT-1004 – Lineær algebra**
Eksamensdato	:	**Fredag 30. september** 05
Tid	:	**kl 0900 – 1300**
Sted	:	**Auditorium Maximum,**
		administrasjonsbygget.
Hjelpemidler	:	**Rothmanns tabeller**
		+ to beskrevne A4-sider.

Oppgavesettet er på 3 sider inkl. forside

Kontaktperson under eksamen: Einar Mjølhus, tlf 44013

I

a) Finn alle løsninger av ligningssystemet

$x + y = 1$
$y + z = 1$
$z + x = 1$

b) La matrisen

$$M(\lambda) = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

være gitt. Vis at rangen til denne matrisen ikke er den maksimale når $\lambda = 2$, og bestem rangen til *M(2)*. Finn også alle løsninger av ligningssystemet

$M(2)X = 0$.

II

a) Forklar kort begrepene *basis* og *dimensjon*. Gjør i denne forbindelse også rede for begrepene *lineær avhengighet* og *uavhengighet* samt *spennet* til en samling vektorer.

b) La $\beta = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$ være en basis for et vektorrom V. Bevis, ut fra definisjonene under a), at enhver vektor $\mathbf{v} \in V$ kan uttrykkes som

$$\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + ... + x_n\mathbf{v}_n,$$

der koordinatvektoren $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ er *entydig* bestemt av $\mathbf{v}$.

c) Vis at $\mathbf{v}_1 = (1,1,1)$, $\mathbf{v}_2 = (1,0,1)$, $\mathbf{v}_3 = (0,1,1)$ danner basis for R^3, og finn koordinatene til $\mathbf{v} = (1,0,0)$ med hensyn til denne basisen.

III

La $\boldsymbol{a}$ være en fast vektor i R^3 og la $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ være definert ved

$T(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \times \mathbf{x}$ (altså : kryssproduktet)

a) Påvis at T er en lineær operator, og beskriv kjernen og bildet til T.

b) Finn det karakteristiske polynomet til T, og bestem eventuelle reelle egenverdier.

IV

La V være mengden av alle reelle funksjoner på formen

$$f(x) = a\cos x + b\sin x$$

a) Påvis at V er et vektorrom, og at $\beta = \{\cos x, \sin x\}$ er en basis for V. Hva er dimensjonen til V?

b) La $D : V \to V$ være definert ved

$Df = f'$ (derivert)

Påvis at D er en lineær operator på V, og finn matrisen til D med hensyn på basisen β.

c) La operatoren A være gitt ved

$$A = D^2 + I$$

der I er identitetsoperatoren. Bestem rangen til A.

Lykke til!