



Eksamensoppgave i MAT-1002

Eksamen i : **Kalkulus 2**

Eksamensdato : **Onsdag 26. september 2007**

Tid : **09.00 - 13.00**

Sted : **Auditorium Maximum**

Tillatte hjelpemidler : **Rottmanns tabeller, 4 A4 ark (8 sider)**
med håndskrevne eller trykte notater,
og lommekalkulator

Oppgavesettet er på 2 sider eksklusive forside

Kontaktperson under eksamen: Marius Overholt, tlf. 77644022,
mobil 95423735

Oppgave 1

a) Regn ut alle partialderivatene til

$$f(x, y) = xe^y - ye^{-x}$$

opp til og med annen orden.

Det oppgis at

$$f_x(\mathbf{0}) = 1, \quad f_y(\mathbf{0}) = -1, \quad f_{xx}(\mathbf{0}) = 0, \quad f_{xy}(\mathbf{0}) = 2, \quad f_{yy}(\mathbf{0}) = 0$$

i origo.

b) Finn gradienten $\nabla f(\mathbf{0})$, Hessianeren $Hf(\mathbf{0})$ og Taylorpolynomet $p_2(x, y)$ av annen orden med senter i origo, for funksjonen f .

c) Regn ut retningsderivatet $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{0})$ til f i origo, hvor $\mathbf{v} = (\mathbf{i} - 2\mathbf{j})/\sqrt{5}$. I hvilken retning vokser f raskest ut fra origo?

Oppgave 2

a) Gitt punktet $P = (3, 3, 7)$ og planet Π med likning

$$x + y + 3z = 5.$$

Finn en parameterframstilling til linja ℓ gjennom P som står normalt på Π , og finn skjæringspunktet Q mellom ℓ og Π .

Forklar kort hvorfor Q er det punktet på Π som ligger nærmest P , og illustrer din forklaring med en enkel skisse.

b) Sett

$$g(x, y, z) = (x - 3)^2 + (y - 3)^2 + (z - 7)^2.$$

Finn minimumspunktet til $g(x, y, z)$ under føringen $x + y + 3z = 5$ ved Lagrange-multiplikatorer.

Forklar kort hvorfor minimumspunktet er det punktet på Π som ligger nærmest punktet P .

Oppgave 3

En romkurve Γ er gitt ved parametriseringen

$$\begin{aligned}x(t) &= \cos(t) \\y(t) &= \sin(t) \cos(2t) \\z(t) &= \sin(t) \sin(2t)\end{aligned}$$

for $0 \leq t < 2\pi$.

a) Finn punktet på Γ som svarer til parameterverdien $t = \pi$ og finn tangentlinjen til kurven i dette punktet.

b) Sett opp et bestemt integral for lengden til Γ . Du skal ikke regne ut lengden. Påvis at kurven ligger på enhetskulen med likningen $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Oppgave 4

a) Avgjør hvilke av rekkene

$$(i) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10n\sqrt{n-7}}$$

$$(ii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{10n\sqrt{n-7}}$$

$$(iii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\sqrt{n}}{10n\sqrt{n-7}}$$

som konvergerer. Begrunn dine konklusjoner.

b) Finn summen til rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{ne^n}$$

hvor $e = 2.718\dots$ er grunntallet for den naturlige logaritmen.

c) Påvis at hvis rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

konvergerer absolutt, så konvergerer også rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$$

absolutt.