EKSAMENSOPPGAVE I MAT-1001

(TIDLIG EKSAMEN)

Eksamen i	:	**MAT-1001 Kalkulus 1**
Dato	:	**Tirsdag 3. februar 2004**
Tid	:	**Kl 0900 - 1300**
Sted	:	
Tillatte hjelpemidler	:	**Godkjent kalkulator**
		Rottmans tabell, 2 medbragte A4 ark

Oppgavesettet er på 3 sider inkl. forside.

Kontaktperson: Tor Flå tlf. 44024

DET MATEMATISK-NATURVITENSKAPELIGE FAKULTET

Universitetet i Tromsø, N-9037 Tromsø, Telefon 77 64 40 01, Telefaks 77 64 47 65

Oppgave 1

Du får oppgitt differenseligningen

$$z_{n+2} - z_{n+1} + z_n = n,$$

a) Finn den generelle løsningen til den tilsvarende homogene differenseligning.
b) Vis at en partikulærløsning til differenseligningen ovenfor er $z_n^p = n - 1$.

c) Løs startverdiproblemet

$$z_{n+2} - z_{n+1} + z_n = 2n$$
$$z_0 = 1,\ z_1 = 0.$$

Oppgave 2

La f være gitt som

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{x}(e^{bx^2} - 1) + 1,\ x > 0,\ b \in \mathbf{R}, \\ -\frac{x^2+1}{x^2-1},\ x \leq 0. \end{array} \right\}$$

a) Finn $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ og $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ og vis at $f(x)$ er kontinuerlig for $x \neq -1$ for alle b.

b) Finn den deriverte til f der den eksisterer.

c) La $b = 1$. Vis at f har en entydig invers hvis vi restrikterer funksjonen til intervallet $[0, \infty)$.

Oppgave 3

a) Vis ved integrasjon at det ubestemte integralet kan uttrykkes som

$$\int \ln(|\ x\ |)x^2 dx = \frac{x^3}{9}(3\ln(|\ x\ |) - 1) + C.$$

b) I hvilke intervall $[a, b]$ kan en finne antideriverte til $f(x) = \ln(|\ x\ |)x^2$ på formen

$$F(x) = \int_a^x \ln(|\ x\ |)x^2 dx.$$

Beregn denne eksplisitt for $a = 1$.

c) Finn en øvre og nedre trappesum på intervallet [1,2] for $F(2)$ med $a = 1$ og partisjonen $\pi = \{x_0, x_1, x_2, , , \ldots . x_N\}$ der $x_i = 1 + \frac{i}{N}$, $i = 0, 1, 2, \ldots N$.

d) Vil disse trappesummene konvergere for $N \to \infty$. mot $F(2)$?

Oppgave 4

Du får oppgitt differensialligningen

$$y'' + y' - 2y = 0.$$

a) Finn den generelle løsningen av differensialligningen ovenfor.

b) Vis at en partikulærløsning til

$$y'' + y' - 2y = e^{-x}x$$

er $y_p = -\frac{1}{2}e^{-x}(x - \frac{1}{2})$.

c) Løs også det inhomogene startverdiproblemet

$$y'' + y' - 2y = 3xe^{-x},$$
$$y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$$