



EKSAMENSOPPGAVE

Eksamen i: STA-1001, Statistikk og sannsynlighet 1

Dato : Fredag 28. september 2007

Tid : 0900 - 1300

Sted : AudMax

Tillatte hjelpemidler: - 4 sider handskrevne notat

- Kalkulator

- «Tabeller og formel i statistikk» av

Kvaløy og Tjelmeland

Oppgavesettet er på 3 sider inkl. forside

Kontaktperson: Sigrunn Sørbye, 92439722

Deloppgavene vil telle likt ved vurderinga.

Oppgave 1

Vi skal i denne oppgaven se på trykkfastheten av en spesiell type murblokker produsert ved en bedrift. Trykkfastheten (det maksimale trykket en blokk kan tåle uten å skades) er antatt normalfordelt med forventningsverdi μ og standardavvik 0.21. Enheten er MPa (10^6 Pascal). Vi antar i punkt a) at $\mu = 2.10$.

- a) Hva er sannsynligheten for at trykkfastheten av en tilfeldig valgt blokk er høyere enn 1.83?
Dersom vi måler 10 tilfeldig valgte blokker hva er sannsynligheten for at den minste trykkfastheten målt blant dem vil være lavere enn 1.83?

Bedriften starter produksjon av en ny type blokker. Det antas at standardavviket er det samme som for den gamle typen. Bedriften vil undersøke om det er grunn til å tru at forventet trykkfasthet av de nye blokkene er under 2.40. For å undersøke dette gjør de et forsøk med n tilfeldig valgte blokker.

- b) Formuler en hypotesetest for problemet over.
Sett opp en testobservator og finn forkastingsområdet til testen med et signifikansnivå på 5%.
Hva blir konklusjonen med $n = 24$ blokker og et målegjennomsnitt på 2.30?
- c) Hva blir teststyrken i testen over for sann verdi $\mu = 2.30$, signifikansnivå 5% og $n = 24$ observasjoner?

Oppgave 2

På et mindre sted skal det være en 3-dagers festival og det kommer derfor et lite tivoli på besøk. Tivoli-ledelsen vil gjerne finne ut hvor mange kunder de kan rekke med i løpet av de 3 dagene, men de veit at dette er avhengig av været. Av erfaring veit de at:

- 1 Det er generelt en sannsynlighet på $\frac{1}{3}$ for at det skal komme regn en tilfeldig dag.
 - 2 Om det regna i går er det $\frac{6}{10}$ sannsynlighet for regn i dag.
- a) Finn sannsynligheten for at det skal regne de to første dagene av festivalen.
Finn sannsynligheten for at det skal regne alle tre dagene.
- b) Vis at sannsynligheten for at det skal regne i dag gitt at det ikke regna i går er $\frac{2}{10}$.
Finn deretter sannsynlighetene for
- 1 Ikke regn i dag gitt regn i går.
 - 2 Ikke regn i dag gitt ikke regn i går.
- c) Vis at sannsynligheten for at det skal regne den tredje dagen dersom det regna den første blir $\frac{11}{25}$.
Dersom det regner den tredje dagen hva er sannsynligheten for at det regna den første dagen?

Oppgave 3

Det har vist seg at levetida for en type jordbruksmaskineri avhenger sterkt av forholdene på stedet (regn, sol, temperatur). Denne informasjonen kan oppsummeres i en såkalt miljøfaktor som er et tall mellom 0 og 1, der lavere tall indikerer dårligere miljø for maskinen.

På bakgrunn av erfaring trur vi at miljøfaktoren (kalt M) for de ulike gardsbruka innen et fylke følger ei fordeling med tetthet

$$f(m) = \beta(1-m)^{\beta-1}, \quad 0 \leq m \leq 1$$

der parameteren β er et tall større enn 0 som vil variere med geografisk område og værforholdene ulike år.

- a) Finn kumulativ fordeling for M .
Vis ved rekning at forventning og varians for M blir

$$E(M) = \frac{1}{1+\beta} \quad \text{Var}(M) = \frac{\beta}{(1+\beta)^2(2+\beta)}$$

Vink: Bruk betafunksjonen side 33 i tabellheftet.

Vi skal i punkt b) nedenfor gå ut fra at i år var $\beta = 1.5$ for Troms fylke.

- b) Skisser tettheten for M .
Finn sannsynligheten for at en tilfeldig valgt gard i Troms skal ha en miljøfaktor over 0.5.
Dersom du veit at faktoren er over 0.5, hva er sannsynligheten for at den skal være under 0.8?

Det er registrert miljøfaktor (M) og levetid i dager (T) for maskineriet for 10 gardar i Troms i 2007:

Gard nr. (i)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Miljøfaktor (m_i):	0.98	0.35	0.54	0.47	0.83	0.24	0.33	0.55	0.74	0.32
Levetid (t_i):	45.9	30.5	48.9	16.3	30.5	4.4	24.4	29.6	108.5	1.4

Vi meiner fra erfaring at når miljøfaktoren, M , er kjent ($M = m$) vil levetida, T , følge ei fordeling med tetthet

$$f(t|m) = \frac{1}{m\gamma} e^{-\left(\frac{t}{m\gamma}\right)}, \quad t > 0$$

Her er parameteren γ et tall større enn 0 som sier noe om kvaliteten på maskineriet.

- c) Vis at den simultane sannsynlighetstettheten for levetida og miljøfaktoren blir

$$f(t, m) = \beta(1-m)^{\beta-1} \frac{1}{m\gamma} e^{-\left(\frac{t}{m\gamma}\right)}, \quad 0 \leq m \leq 1, \quad t > 0$$

Bruk sannsynlighetsmaksimering til å konstruere estimatorer for γ og β .

- d) Bruk dataene til å finne estimatorer for γ og β .
Finn et tilnærma uttrykk for forventninga til estimatoren for γ ved å bruke 1. ordens taylorrekke-utvikling. Her kan du bruke at $E(T) = \frac{\gamma}{1+\beta}$.