EKSAMENSOPPGAVE I MAT-1001 (BOKMÅL)

Eksamen i	**: MAT-1001 KALKULUS 1**
Dato	**: Mandag 13. desember 2004**
Tid	**: Kl 1500- 1900**
Sted	**: Samvirkegården, 4. etg.**
Tillatte hjelpemidler	**: Godkjent kalkulator, Rottmans tabell, 2 A4 ark med egne notater.**

Oppgavesettet er på 3 sider inkl. forside

Kontaktperson: Per Jakobsen tlf. 44020

DET MATEMATISK-NATURVITENSKAPELIGE FAKULTET

Universitetet i Tromsø, N-9037 Tromsø, Telefon 77 64 40 01, Telefaks 77 64 47 65

Problem 1

a)

i) Skriv det komplekse tallet

$$z = \frac{4+4i}{(1+i)(\sqrt{3}-i)},$$

på rektangulær og polar form.

ii) Tegn følgende område i det komplekse planet

$$V = \{z \mid 1 \leq |z - i - 1| \leq 2\}.$$

iii) Finn alle løsninger til ligningen

$$(1+2i)z^4 - \frac{3+i}{1-i} = 0,$$

på rektangulær form.

iv) La p, q og r være reelle tall og anta at $z \in \mathbb{C}$ er en løsning på ligningen

$$z^3 + pz^2 + qz + r = 0.$$

Vis at da er $\overline{z}$ også en løsning. Vis så at denne ligningen har enten tre reelle løsninger eller en reel og to komplekse løsninger som er konjugerte av hverandre.

Her kan du bruke Algebraens fundamental teorem som sier at en polynomisk ligning av orden 3 har akkurat tre komplekse løsninger.

b) Finn den generelle reelle løsningen til differensligningen

$$4x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 0.$$

c) Løs følgende problem

$$\begin{aligned} 4x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n &= 0, \\ x_0 &= 0, \\ x_1 &= 1, \end{aligned}$$

og vis at $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

Problem 2

La $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være funksjonen

$$f(x) = \frac{x}{2} - 3\arctan(1+2x) - \frac{1}{4}\ln(1+2x+2x^2)$$

a) Vis at f har et nullpunkt i det åpne intervallet $(-1, 0)$.

b) Undersøk hvor funksjonen er voksende og avtagende. Finn eventuelle lokale og globale ekstremalpunkter.

c) Undersøk så hvor f er konveks og konkav.

d) Vis at

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}$$

og bruk så dette til å vise at f må ha et nullpunkt for $x > 0$. Skisser grafen til f.
(Merk: Du skal ikke bruke kalkulator i denne oppgaven)

Problem 3

a) Beregn grensen

$$\lim_{x \to 0^+} x^x$$

b) Løs integralene

i)

$$\int x^2 \sin(x) dx$$

ii)

$$\int \frac{2x^2 + 5x - 1}{x^3 + x^2 - 2x} dx$$

iii)

$$\int \frac{1}{1 + e^x} dx$$

Problem 4

a) Finn den generelle løsningen til ligningen

$$y'' + 4y = 3\cos(2x).$$

b) Løs startverdiproblemet

$$y'' + 4y = 3\cos(2x),$$
$$y(0) = 0,$$
$$y'(0) = 1.$$

c) Finn den generelle løsningen til differensialligningen

$$y' + y = xy^2$$

ved å bytte variabel til $u = \frac{1}{y}$ og løse den resulterende ligningen for u.