



EKSAMENSOPPGAVE I MAT-1002

Eksamen i : **MAT-1002 Kalkulus 2**

Eksamensdato : **Mandag 7. juni 2004**

Tid : **Kl 09:00-13:00**

Sted : **Samvirkegården, 3 etasje**

Tillatte hjelpemidler : **-Rottmanns tabeller**
-2 A4 ark med egne notater
-Kalkulator

Oppgavesettet er på 2 sider ekskl. forside

Kontaktperson under eksamen: Marius Overholt, tlf. 44022

Oppgave 1

a) Regn ut alle partialderivatene til

$$f(x, y) = x \sin(y) - y \cos(x)$$

opp til og med annen orden.

Det oppgis at

$$f_x(\mathbf{0}) = 0, \quad f_y(\mathbf{0}) = -1, \quad f_{xx}(\mathbf{0}) = 0, \quad f_{xy}(\mathbf{0}) = 1, \quad f_{yy}(\mathbf{0}) = 0$$

i origo.

b) Finn gradienten $\nabla f(\mathbf{0})$, Hessianeren $Hf(\mathbf{0})$ og Taylorpolynomet $p_2(x, y)$ av annen orden med senter i origo, for funksjonen f .

c) Regn ut retningsderivatet $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{0})$ til f i origo, hvor $\mathbf{v} = 7\mathbf{i} - \mathbf{j}$. I hvilken retning vokser f raskest ut fra origo?

d) Bestem grensen

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - (-y + xy)}{x^2 + y^2}.$$

Oppgave 2

a) Gitt punktet $P = (3, 2, 1)$ og planet Π med likning

$$x + 2y + 3z = 6.$$

Finn en parameterframstilling til linja ℓ gjennom P som står normalt på Π , og finn skjæringspunktet Q mellom ℓ og Π .

Forklar kort hvorfor Q er det punktet på Π som ligger nærmest P , og illustrer din forklaring med en enkel skisse.

b) Sett

$$g(x, y, z) = (x - 3)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2.$$

Finn minimumspunktet til $g(x, y, z)$ under føringen $x + 2y + 3z = 6$ ved Lagrange-multiplikatorer.

Forklar kort hvorfor minimumspunktet er det punkt på Π som ligger nærmest punktet P .

c) Formuler problemet å finne det punkt på Π som ligger nærmest P som et minimumsproblem for en funksjon av to variabler, uten føringer. Løs problemet ved å finne det kritiske punkt. Klassifiser deretter det kritiske punkt.

Oppgave 3

Avgjør konvergens eller divergens av følgende rekker:

$$(i) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2+n}}$$

$$(ii) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{2+n}}$$

$$(iii) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{\sqrt{2+n}}$$

Begrunn svarene.

b) Påvis at rekka

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{n+\sqrt{2}-1}$$

konvergerer uniformt til $x^{\sqrt{2}-1} e^x$ på $[0, 1]$. Begrunn deretter at

$$\int_0^1 x^{\sqrt{2}-1} e^x dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{\sqrt{2} + n} .$$

c) Gi et eksempel på en potensrekke som ikke konvergerer uniformt på sitt konvergensintervall, og påvis at rekken ikke konvergerer uniformt på konvergensintervallet.