

EKSAMEN MAT-1002 KALKULUS 2

7. Juni 2005

Kontaktpersoner:

Martin Rypdal +4790175422
Per Jakobsen 776 44020

Hjelpemidler: 4 sider med notater og kalkulator.

Alle svar skal begrunnes og alle nødvendige mellomregninger skal være med i besvarelsen. Oppgavesettet er på 2 sider.

Oppgave 1

La $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ være gitt ved $f(x, y) = x^2y - xy^2 + xy$.

a) Finn alle kritiske punkter for funksjonen f . Avgjør om hvert av de kritiske punktene er et lokalt maksimumspunkt, et lokalt minimumspunkt, et sadelpunkt eller et degenerert kritisk punkt.

b) Finn gradienten til f . La $a = (1, 1)$ være et punkt i $\mathbb{R}^2$ og la $\mathbf{h} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ være en vektor. Finn den retningsderiverte til f i retning $\mathbf{h}$ i punktet a . Finn første ordens Taylor-utvikling av f om punktet $a = (1, 1)$.

c) La $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ være en avbildning gitt ved $(x, y) \mapsto (x + y, y - x^2)$, og la $h = f \circ g$. (f er funksjonen $f(x, y) = x^2y - xy^2 + xy$). Finn gradienten ∇h i punktet $a = (1, 1)$ ved å bruke kjerneregelen.

Oppgave 2

La $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ være gitt ved $f(x, y) = x^2 - y^2$.

a) Vis at punktet $P = (1, 2, -3) \in \mathbb{R}^3$ ligger på grafen til f . Finn tangentplanet for grafen til f i punktet P . Finn avstanden mellom tangentplanet og origo $O = (0, 0, 0)$.

b) Finn ekstremalverdiene til f på området $K = [0, 1] \times [0, 1]$.

c) Kan vi være sikre på at enhver kontinuerlig funksjon definert på området K har en maksimumsverdi og en minimumsverdi? Begrunn svaret.

Oppgave 3

La

$$\begin{aligned}x &= t \cos(t) \\ y &= t \sin(t) \quad , \quad t > 0 \\ z &= t\end{aligned}$$

være en parameterframstilling av en kurve i $\mathbb{R}^3$.

a) Beskriv kurven. (For eksempel ved en tegning.) Skriv en parameterframstilling for samme kurve i sylinderkoordinater (r, θ, z) .

b) Finn parameterframstilling (i kartesiske koordinater) for en todimensjonal flate i $\mathbb{R}^3$ som kurven ligger på. Beskriv denne flaten. (For eksempel ved en tegning.) Velg et punkt $P \neq (0, 0, 0)$ på flaten, og finn tangentplanet til flaten i dette punktet.

Oppgave 4

a) Avgjør om rekkene konvergerer:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n^2}.$$

b) Definer hva det vil si at en funksjonsfølge $\{f_n\}$ konvergerer uniformt til funksjonen f på et område A . Definer hva det vil si at en rekke av funksjoner $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)$ konvergerer uniformt til funksjonen $s(x)$ på et område A .

c) La $f_n(x) = \frac{1}{1+nx^2}$ være funksjoner på $\mathbb{R}$. Finn den punktwise grensa til funksjonsfølgen $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$. Er konvergens uniform?

d) Er funksjonen $h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n+x)}{n^2}$ kontinuerlig på $\mathbb{R}$?

Oppgave 5

a) Finn 5. ordens Taylorpolynom for $\sin(x)$ om punktet $a = 0$.

b) Finn grenseverdien $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$.

c) Bruk resultatet (a) til å finne en tilnærming av $\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x} dx$. Estimer hvor stor feil du har gjort i tilnærmingen.

d) Finn Taylorrekka til $\arctan(x)$ om punktet $a = 0$, og bruk resultatet til vise at $\int_0^1 \frac{\arctan(x)}{x} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$.