EKSAMENSOPPGAVE I MAT- 1003 (BOKMÅL)

Eksamen i	:	**MAT-1003 KALKULUS- 3**
Dato	:	**Mandag 6.desember 2004**
Tid	:	**Kl 0900 - 1300**
Sted	:	**Aud.Max**
Tillatte hjelpemidler	:	**Godkjent kalkulator, godkjent formelsamling, statistiske tabeller, og to egne A4- ark (4 sider)**

Oppgavesettet er på 3 sider inkl. forside

Kontaktperson: Tor Flå tlf. 776 44024

DET MATEMATISK-NATURVITENSKAPELIGE FAKULTET

Universitetet i Tromsø, N-9037 Tromsø, Telefon 77 64 40 01, Telefaks 77 64 47 65

Eksamen i:	Mat-1003, Kalkulus-3
Eksamensdag:	Mandag 6. desember 2004
Eksamenstid:	Kl. 0900 - 1300
Eksamensted:	Aud. Max
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator, godkjent formelsamling, statistiske tabeller og to egne A4-ark (4 sider).
Oppgavesettet:	2 sider
Kontaktperson:	Tor Flå, tlf. 776-44024

Oppgave 1

Du får oppgitt funksjonen $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$ med et definisjonsområde for f : $D = \{(x,y) \mid 1 \leq x^2+y^2 \leq 2\}$.

a) Begrunn at følgende integral eksisterer. $\iint_D f(x,y)dxdy$.

b) Formuler integralet som et integral over et elementært område i xy-planet: $\iint_D f(x,y)dxdy = 2\iint_{D_1} f(x,y)dxdy$. Her får du oppgitt at D_1 er den halvparten av D som ligger i øvre halvplan. Transformer deretter ved variabelskifte integralet til polarkoordinater og løs det.

c) Finn volumet innenfor følgende område $W = \{(x,y,z) \mid ax^2+by^2+cz^2 \leq 2$ for $a,b,c > 0\}$ ved å formulere og løse et trippelintegral.

d) Et begrenset område V i xy-planet har areal $A(V) = 1$. Du får oppgitt transformasjonen T av planet på seg selv ved $(x,y) = T(u,v) = (u+v, u-v)$. Finn nå arealet til V^* gitt ved $T(V^*) = V$.

Oppgave 2

La vektorfeltet $\mathbf{F}(x,y,z) = (x-z)\mathbf{i} + (x+y)\mathbf{j} + (z+x)\mathbf{k}$.

a) Finn divergensen $div(\mathbf{F})$ og curlen $curl(\mathbf{F})$.

b)Kan du finne et vektorfelt $\mathbf{H}$ slik at $div(\mathbf{F}_1) = 0$ og $curl(\mathbf{F}_1) = curl(\mathbf{F})$ når $\mathbf{F}_1 = \mathbf{F} + \mathbf{H}$.

c) Beregn flateintegralet

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS \ .$$

Her er S enhetsfæren $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ og $\mathbf{n}$ er dens utoverpekende enhetsnormal.

d) Beregn linjeintegralet

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

der C er den lukkede kurven bestående av de rette linjestykkene orientert i rekkefølgen: P_0P_1, P_1P_2 og P_2P_0. Her er $P_0 = (-1,-1,-1)$, $P_1 = (1,0,1)$ og $P_2 = (0,0,1)$.

Oppgave 3 (De som var oppmeldt også høsten 2003 i Mat-1003 kan alternativt gjøre oppgave 4. De øvrige skal gjøre oppgave 3, men ikke oppgave 4!!!!!)

a) Du får oppgitt egenverdiproblemet

$$\begin{aligned} T(f) &= -k\frac{d^2f}{dx^2} = \lambda f,\ x \in [0,1], k > 0 \\ f(0) &= 0 \text{ og } f(1) = 0. \end{aligned}$$

Du får også oppgitt indreproduktet $< f, g >= \int_0^1 f(x)g(x)dx$ på vektorrommet av kontinuerlige funksjoner på $[0,1]$, $E = C[0,1]$. Vis at $T : V \to E$ er en symmetrisk operator med hensyn på et underrom V av E.

b) Argumenter for at egenverdiene λ må være reelle og positive og at egenfunksjonene må være ortogonale.

Vi skal nå tenke oss at vi får oppgitt et sett med målte $(x,y)-$verdier og skal tilpasse disse til $y = f(x) = a_1 \sin(\pi x) + a_2 \cos(\pi x)$. Målingen kan inneholde målefeil og er gitt ved :$(x_1 = 1/4, y_1 = 1)$, $(x_2 = 1/2, y_2 = 3)$, $(x_3 = 3/4, y_3 = 2)$. Vi skal tilpasse til modellen ved å skrive ligninger for de ukjent koeffisientene $\mathbf{a} = [a_1, a_2]^T : y_i = f(x_i)$ for hvert datapunkt.

c) Verifiser at ligningsettet kan skrives $A\mathbf{a} = \mathbf{c}$ der

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix},\ \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Er dette ligningsystemet konsistent?

d) Finn et konsistent ligningsystem som tilsvarer en minste kvadrat tilnærming til ovenstående ligninger og løs disse. Finn også kvadratfeilen til løsningen.

Oppgave 4 (Kan bare tas som alternativ for oppgave 3 hvis du var oppmeldt i Mat-1003 høsten 2003!!!)

a) Finn alle de kritiske punktene til $f(x,y) = x^2 + y^3 - 3xy + x$.

b) Avgjør hvilke av disse kritiske punktene som gir lokal minima, lokale maksima eller sadelpunkter. Vi utvider nå funksjonen til å ha en parameter

$c \in \mathbb{R}$:$h(x,y) = x^2 + y^3 - cxy + x$. For hvilke c -verdier har funksjonen h ingen lokale ekstremalpunkt.

c) Finn retningsderiverte til $f(x,y)$ i punktet $(1,1)$ og i retningen $\mathbf{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1,1)$.

d) Finn også maksimum og minimum til funksjonen $d(x,y) = x^2+y^2-3xy+x$ gitt føringen

$g(x,y) = x^2 + y^2 - 2 = 0$.