Universitetet i Tromsø

Det Matematisk Naturvitenskapelige Fakultet
Institut for Matematikk og Statistikk

Eksamen i:	MAT-1003, Kalkulus-3
Eksamensdag:	Mandag 8/12 2003
Eksamenstid:	Kl. 09.00-13.00
Eksamenssted:	Samvirkegården, 4. etg.
Tillate hjelpemidler:	Godkjent kalkulator, formelsamling og to egne A4-ark (4 sider)
Oppgavesettet:	Totalt på 2 sider
Kontaktperson:	Førsteamanuensis *Boris Kruglikov*, tlf. 776 44 779
Bemerkning:	Besvarelsen må inneholde alle mellomregninger man trenger for å komme fram til svaret

Oppgave I

La $f(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 2x^2 - 18y^2$ og $g(x,y) = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} - 1$.

1. Finn og klassifiser alle lokale ekstremalpunkter til funksjonen f på $\mathbb{R}^2$. Finn alle globale ekstremalpunkter (maksima og minima) hvis de eksisterer.
2. Ved bruk av teori for Lagrange multiplicatorer, beregn alle kritiske punkter tilhørende funksjonen f for problemet med føringen $g = 0$. Bruk annenderivat-testen for å bestemme hvilke som er ekstremalpunkter.
3. Finn globale ekstremalpunkter og maksimums- og minimumsverdiene til f i lukkede område

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\right\}.$$

4. Ved bruk av kjerneregelen (chain rule), beregn differensialet til funksjonen $h(x,y) = H(f(x,y), g(x,y))$. Her $H(u,v)$ er en glatt funksjon.

Oppgave II

La $\bar{F} = (2x + y^2, 2xy + z^2, \varepsilon yz + 2z)$ være et vektorfelt i $\mathbb{R}^3$. La

$$A = (0,0,0),\ B_1 = (1,0,0),\ B_2 = (0,0,1),$$
$$C_1 = (1,1,0),\ C_2 = (1,0,1),\ D = (1,1,1).$$

1. Beregn og sammenlign de følgende vei-integralene: $\int_{\gamma_1} \bar{F} \cdot d\bar{s}$ og $\int_{\gamma_2} \bar{F} \cdot d\bar{s}$. Her er veiene polygontrekk: $\gamma_1 = AB_1C_1D$ og $\gamma_2 = AB_2C_2D$.
2. Finn for hvilke verdier av ε vektorfeltet $\bar{F}$ er konservativt og beregn et skalarpotensial for disse parameterverdiene. Beregn da vei-integralene fra siste oppgave for disse vierdiene av ε på en annen måte.
3. Bekreft ved utregning Stokes' formelen for $\bar{F}$ i kvadratet $B_1C_2DC_1$ som er orientert med normalen $(-1,0,0)$.

Oppgave III

La $E_1 = \{(x,y,z) \mid 0 \leq z \leq 8 - x - y\}$, $E_2 = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$ og $D = E_1 \cap E_2 \subset \mathbb{R}^3$. La også $\bar{F} = (2x - y + z, x + 2y, y - z)$ være et vektrofelt.

1. Vis at flaten $C = \partial E_2$ er glatt regulær. Beregn ligningen til tangentplanet T_aC i punktet $a = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 5)$.
2. Beregn integralet $\iint_{\partial D} \bar{F} \cdot d\bar{S}$ over grensen ∂D, med orientering definert av utoverpekende normal.
3. Beregn volum til området D. Sett disse i forbindelse med det siste flateintegralet via Gauss' formelen.