EKSAMENSOPPGAVE MAT-1003

Eksamen i	**:**	**MAT-1003**
Eksamensdato	**:**	**21. februar 2007**
Tid	**:**	**Kl 0900 - 1300**
Hjelpemidler	**:**	**Rottmanns tabeller; 2 A4-ark med håndskrevne notater på begge sider; godkjent kalkulator.**

Oppgavesettet er på 5 sider inkl. forside

Kontaktperson under eksamen: Einar Mjølhus, tlf. 776 44013

DET MATEMATISK-NATURVITENSKAPELIGE FAKULTET

Universitetet i Tromsø, N-9037 Tromsø, Telefon 77 64 40 01, Telefaks 77 64 47 65

Oppgave 1

a) La T være trekanten med hjørner $(0,0)$, $(0,\frac{\pi}{2})$ og $(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ i $\mathbf{R}^2$, og (x,y) koordinater i $\mathbf{R}^2$.

Beregn

$$\iint_T \cos x\,dxdy\,.$$

b) La P være firkanten med hjørner $(0,\frac{\pi}{2})$, $(-\frac{\pi}{2},0)$, $(0,-\frac{\pi}{2})$ og $(\frac{\pi}{2},0)$. Beregn

$$\iint_P \cos(x-y)\,dxdy$$

ved å foreta et lineært variabelskifte slik at det nye området blir et kvadrat med sidekanter parallelle med koordinataksene.

Oppgave 2

Vektorfeltene $\mathbf{F}$ og $\mathbf{G}$ er gitt ved

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = zx\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$$
$$\mathbf{G}(\mathbf{r}) = yz\mathbf{i} + zx\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$$

der $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, x, y, z er kartesiske koordinater og $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ og $\mathbf{k}$ er enhetsvektorer langs koordinataksene.

a) Undersøk om ett eller begge disse vektorfeltene er gradienten til et skalarfelt, og finn i så fall alle disse skalarfeltene.

b) La C være den stykkevis glatte kurven som danner omkretsen til kvadratet i xy-planet med

hjørner (0,0), (1,0), (1,1) og (0,1), orientert i positiv omløpsretning. Beregn linjeintegralene

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

og

$$\oint_C \mathbf{G} \cdot d\mathbf{s} \quad .$$

Oppgave 3

a) La C være en stykkevis glatt enkel lukket kurve i planet. Vis at arealet avgrenset av C kan beregnes ved linjeintegralet

$$A = \frac{1}{2}\oint_C (xdy - ydx)$$

der C er orientert i positiv omløpsretning. Bruk dette til å beregne arealet innafor kurven gitt ved parameterframstillingen

$$x(t) = a\cos^3 t$$
$$y(t) = a\sin^3 t$$
$$t \in [0, 2\pi]$$

der $a>0$.

b) La flaten S være gitt ved parameterframstillingen

$$x(s,t) = as\cos^3 t$$
$$y(s,t) = as\sin^3 t$$
$$z(s,t) = h(1-s)$$
$$(s,t) \in [0,1]\times[1,2\pi]$$

der $a>0$ og $h>0$. Undersøk hvor på S normalen er definert. La P være et vilkårlig punkt på kurven C under a). Vis at den rette linja fra P til punktet $(0,0,h)$ ligger på S.

c) Finn volumet mellom S og xy-planet.

d) Beregn fluksen av vektorfeltet $\mathbf{H}(x,y,z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ gjennom S, der x,y og $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ har samme mening som i oppgave 2, og orienteringen av S er slik at z-komponenten til normalen er positiv.

Oppgave 4

a) La V være et vektorrom over $\mathbf{C}$ (d. v. s., skalarene er komplekse tall). Forklar hva som menes med et indreprodukt på V, og forklar hvordan avstand mellom vektorer i V blir definert ved hjelp av dette indreproduktet. La V spesielt være vektorrommet av kontinuerlige funksjoner u på $[0,\pi]$ som oppfyller $u(0) = u(\pi) = 0$ og hvor indreproduktet er

$$\langle u, v\rangle = \int_0^{\pi} u(x)\overline{v}(x)dx$$

Uttrykk hvordan avstanden mellom to funksjoner er definert ved hjelp av dette indreproduktet.

b) Definer alment hva som menes med at to vektorer i et indreproduktrom er ortogonale, og

vis at funksjonene $u_1(x),...,u_n(x),...$, der $u_k(x) = \sin kx$, der k er et positivt heltall, er innbyrdes ortogonale i indreproduktrommet V under a).

c) La $f \in V$ være gitt ved

$$f(x) = x(\pi - x),$$

og la underrommet W_{100} være utspent av $u_1(x),...,u_{100}(x)$. Bestem beste tilnærming til f i W_{100} med hensyn til avstanden under a).

Lykke til