EKSAMENSOPPGAVE I STA-2001

Eksamen i	:	Sta-2001 Stokastiske prosesser
Dato	:	Fredag 23. februar 2007
Tid	:	Kl. 0900–1300
Sted	:	Aud. max., Administrasjonsbygget.
Tillatte hjelpemidler	:	4 sider (A4) egne notater Godkjent kalkulator Rottmanns formelsamling

Oppgavesettet er på 3 sider inklusive forside.

Kontaktperson: Sigrunn H. Sørbye, tlf. 77 64 55 04.

DET MATEMATISK-NATURVITENSKAPELIGE FAKULTET
Universitetet i Tromsø, N-9037 Tromsø, Telefon 77 64 40 01, Telefaks 77 64 47 65

Oppgave 1

Vi antar at kjøreforholdene om vinteren i Tromsø hver dag kan beskrives ved en av tre kategorier:

$$0 : \text{Ikke glatt}, \quad 1 : \text{Snøføre, noe glatt}, \quad 2 : \text{Isføre, meget glatt.}$$

For å beskrive utviklingen av kjøreforholdene fra dag til dag brukes en Markovkjede, $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$, med overgangsmatrise

$$P = \begin{Vmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.4 & 0.5 & 0.1 \\ 0.6 & 0.1 & 0.3 \end{Vmatrix}.$$

a) La n stå for en vilkårlig dag. Finn følgende sannsynligheter

$$P(X_{n+1} = 1 \mid X_n = 2), \quad P(X_{n+2} = 0 \mid X_n = 0), \quad P(X_{n+2} = 2 \mid X_{n+1} = 1, X_n = 0).$$

b) Anta i dette punktet at det ikke er glatt i dag. Hva blir sannsynligheten for at det blir meget glatt i løpet av en av de tre kommende dagene? Hva blir forventet tid til det blir meget glatt?

c) Begrunn hvorfor den gitte Markovkjeden vil ha en grensefordeling. Sett opp aktuelle likninger og finn kjedens grensefordeling. I det lange løp hvor stor del av tiden er det meget glatt?

d) I virkeligheten avhenger kjøreforholdene i dag ikke bare av kjøreforholdene i går, men også av kjøreforholdene i forgårs. Vis hvordan du kan sette dette opp som en 9-tilstands Markovkjede. Sett videre opp overgangsmatrisen for denne kjeden når det opplyses at samme tilstand 2 dager på rad gir denne tilstand også neste dag med sannsynlighet 0.5, og med sannsynlighet 0.25 på hver av de andre to tilstandene denne neste dagen. Videre, for to dager etter hverandre med ulik tilstand, blir tilstanden neste dag lik siste dags tilstand med sannsynlighet 0.5 og lik den første dagens tilstand med sannsynlighet 0.3.

Oppgave 2

En mus er plassert i et bur med 3 åpninger, heretter kalt åpning 1, 2 og 3. Musen velger tilfeldig en av disse åpningene, slik at hver av de tre har like stor sannsynlighet for å bli valgt. Hvis musen velger åpning 1, kommer den ut i en gang der den etter ett minutt kommer fram til en ostebit. Fra åpning 2 er det en gang som går i en sløyfe tilbake til utgangspunktet i buret. Musen bruker 2 minutter på å komme tilbake. Også fra åpning 3 går det en sløyfe, der musen vender tilbake etter 4 minutter. Det er ingen læringseffekt og dersom musen kommer tilbake igjen, velger den straks en ny åpning og gjentar dette helt til den finner ostebiten. La T være tiden til musen finner ostebiten, og la Y stå for det valget musen gjør første gang, det vil si at $Y = i$ betyr at åpning i velges, der $i = 1, 2, 3$.

a) Finn $E(T)$ og $Var(T)$.

Oppgave 3

Et konsulentfirma tar seg av service på hjemme pc-er. Feilmeldinger kommer inn til firmaet i følge en Poissonprosess med gjennomsnittlig 5 feilmeldinger i timen. La $N(t)$ være antall feilmeldinger i løpet av en tidsperiode t. La T_i være tiden mellom feilmelding nr. $i-1$ og feilmelding nr. i og la $S_n = \sum_{i=1}^{n} T_i$.

a) Finn følgende størrelser:

$$P(N(1)=5), \quad P(N(2)-N(1)=5 \mid N(1)=5), \quad E(T_2) \quad \text{og} \quad E(S_{20} \mid N(3)=13).$$

b) Firmaet åpner klokken 8. Ankomsttid for en av medarbeiderne i firmaet er uniformt fordelt mellom klokken 8 og 9.30. Hva blir forventet antall feilmeldinger som kommer inn før denne medarbeideren er kommet på jobb?

Kostnadene ved reparasjoner er innbefattet i kundeavtalen hjemme pc-brukerne har. Kostnaden X for konsulentfirmaet for et serviceoppdrag er normalfordelt med forventning $\mu = 2000$ kr og standardavvik $\sigma = 500$ kr. Antall serviceoppdrag N i løpet av en uke er Poisson-fordelt med rate 20 pr. uke.

c) Hva blir forventet kostnad i løpet av en uke? Hva blir tilhørende standardavvik?

Oppgave 4

Kunder ankommer et betjeningssystem i følge en Poissonprosess med rate $\lambda = 5$ kunder pr. time. Det er 3 betjenere. Hver betjener har en eksponensielt fordelt betjeningstid med forventning lik 20 minutter. Ved tid $t = 0$ betjenes Anita, Berit og Cecilie av hver sin betjener, mens David står for tur. Når det blir ledig plass, rykker David frem til betjening. Alle betjeningstider antas statistisk uavhengige.

a) Hva blir forventet tid til den siste av de 4 personene forlater systemet? Hva er sannsynligheten for at Anita blir sistemann ferdig?

Vi antar nå at kunder som ankommer systemet når alle betjenere er opptatt, ikke står i kø, men forlater systemet øyeblikkelig.

b) Sett opp likevektslikningene (balanselikningene) for dette systemet. Løs likningene og finn forventet antall kunder i systemet i likevektstilstanden. Hva blir andelen potensielle kunder som blir avvist?