



EKSAMENSOPPGAVE I STA-2001

Eksamen i : Sta-2001 Stokastiske prosesser
Dato : Onsdag 29. november 2006
Tid : Kl. 0900–1300
Sted : Åsgårdvegen 9
Tillatte hjelpemidler : 4 sider (A4) egne notater
Godkjent kalkulator
Rottmanns formelsamling

Oppgavesettet er på 3 sider inklusive forside.

Kontaktperson: Sigrunn H. Sørbye, tlf. 92 43 97 22

DET MATEMATISK-NATURVITENSKAPELIGE FAKULTET
Universitetet i Tromsø, N-9037 Tromsø, Telefon 77 64 40 01, Telefaks 77 64 47 65

Oppgave 1

Anta at et system består av tre komponenter. Hver komponent kan være i tilstand A , B eller C , og tilstanden til systemet kan dermed beskrives ved en sekvens av lengde tre bestående av disse bokstavene. I løpet av ett tidssteg endres tilstanden til alle de tre komponentene, uavhengig av hverandre. Endringen skjer på følgende måte: Dersom en komponent er i tilstand A endres denne til enten B eller C med lik sannsynlighet. Likedan endres en tilstand B til enten A eller C og en tilstand C til enten A eller B . I løpet av **ett** tidssteg endres dermed tilstanden til systemet til en av åtte like sannsynlige sekvenser. I løpet av for eksempel **tre** tidssteg, der ABC er startsekvens, kan ett mulig endringsforløp for systemet være: $ABC \rightarrow BCB \rightarrow AAA \rightarrow CCB$.

La $\{X_n, n = 0, 1, \dots\}$ angi Markovkjeden definert på tilstandsrommet $\{1, 2, 3\}$ der tilstandene beskrives ved

- 1 : De tre komponentene i systemet er i ulike tilstander A , B og C .
- 2 : To av de tre komponentene i systemet er i samme tilstand.
- 3 : Alle de tre komponentene i systemet er i samme tilstand.

Overgangsmatrisen for Markovkjeden vil være gitt ved

$$P = \begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 \\ 1/4 & 5/8 & 1/8 \\ 0 & 3/4 & 1/4 \end{bmatrix}.$$

Vi antar i denne oppgaven at $X_0 = 1$.

- a) Begrunn kort hvorfor $\{X_n\}_{n=0}^\infty$ er en Markovkjede og tegn et tilstandsdiagram for kjeden. Vis utfra beskrivelsen av det gitte systemet hvordan følgende sannsynligheter i overgangsmatrisen er beregnet: $P_{12} = \frac{3}{4}$ og $P_{22} = \frac{5}{8}$.
- b) La Y angi antall ganger kjeden returnerer til tilstand 1 før den havner i tilstand 3. Finn først sannsynligheten for at kjeden returnerer til tilstand 1 uten å ha vært innom tilstand 3. Hva blir $P(Y = n)$ for $n \geq 1$? Hva blir $E(Y)$?

- c) Definer

$$Z = \min\{n > 0 : X_n = 3\}.$$

Finn $P(Z > 3)$. Hva blir $E(Z)$?

- d) Begrunn at grensefordelingen

$$\pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}^n, \quad j = 1, 2, 3$$

eksisterer og finn π_1, π_2 og π_3 . Gi en tolkning av størrelsen $1/\pi_3$.

Oppgave 2

La $\{N(t), t \geq 0\}$ angi en telleprosess, som betinget på $L = \lambda$, er en Poissonprosess med rate λ pr. tidsenhet. Den stokastiske variabelen L antas eksponensialfordelt med rate $\mu > 0$ pr. tidsenhet.

- a) Vis at sannsynlighetsfordelingen til $N(t+s) - N(s)$ er gitt ved

$$P(N(t+s) - N(s) = n) = \frac{\mu t^n}{(\mu + t)^{n+1}}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad s \geq 0, \quad \mu > 0.$$

(Hint: $\Gamma(m) = \int_0^\infty e^{-x} x^{m-1} dx = (m-1)!$ der m er et positivt heltall).

Hvorfor er ikke den ubetingede prosessen $N(t)$ en Poissonprosess? Begrunn svaret.

- b) Finn forventning og varians til $N(t)$.

Oppgave 3

I denne oppgaven ser vi på en enkel modell for kødannelse foran en kiosk bemannet av en person. Vi definerer en fødsels og dødsprosess $X(t)$ lik antall kunder i dette køsystemet ved tid t (inkludert person som blir betjent). Vi antar at potensielle kunder ankommer kiosken i henhold til en Poissonprosess med rate $\lambda = 0.4$ pr. minutt, men går ut fra at lysten til å stille seg i kø avtar når køen vokser. Vi antar

$$P(\text{Potensiell kunde med ankomsttid } t \text{ slutter seg til køen} \mid X(t) = k) = \frac{1}{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

En potensiell kunde som ikke slutter seg til køen, regnes som tapt (går til en annen kiosk i stedet) og inngår altså ikke i $X(t)$. Betjeningstiden for hver kunde antas eksponensialfordelt med rate $\mu = 0.5$ pr. minutt. Kiosken åpner ved tid $t = 0$ og $X(0) = 0$.

- a) Spesifiser fødselsratene $\{\lambda_n\}_{n=0}^\infty$ og dødsratene $\{\mu_n\}_{n=1}^\infty$ for $X(t)$. Kan det gitte køsystemet beskrives med betegnelsen $M/M/1$? Begrunn svaret.
- b) La T_i angi tid fra prosess som starter i tilstand i , kommer til tilstand $i+1$. Utled den generelle formelen for en fødsels og dødsprosess gitt ved:

$$E(T_i) = \frac{1}{\lambda_i} + \frac{\mu_i}{\lambda_i} E(T_{i-1}), \quad i \geq 1.$$

Hva blir forventet tid til det første gang er to kunder i det gitte køsystemet?

- c) Vi antar i dette punktet at potensiell kunde nr. 2 ankommer kiosken nøyaktig 5 minutter etter at kiosken åpnet.
- Finn sannsynligheten for at første kunde er ferdigbetjent ved dette tidspunktet. Hva blir sannsynligheten for at kunden som ankommer ved tid $t = 5$ slutter seg til køsystemet?
- d) Begrunn hvorfor grensefordelingen for $X(t)$ vil eksistere og vis at denne er en Poissonfordeling med rate λ/μ . I hvor stor andel av tiden vil det i det lange løp være minst en kunde i køsystemet?