EKSAMENSOPPGAVE MAT-1003

Eksamen i	:	**MAT-1003 Kalkulus 3**
Eksamensdato	:	**Onsdag 23. februar 2005**
Tid	:	**Kl 09:00-13:00**
Sted	:	**Samvirkegården, 4. etasje**
Tillatte hjelpemidler	:	**- 2 A4 ark skrevet på begge sider**
		- Rottmanns tabeller
		- Godkjente kalkulatorer

Oppgavesettet er på 3 sider inkl. forside

Kontaktperson under eksamen: **Professor Tor Flå,**
Tlf 44024

DET MATEMATISK-NATURVITENSKAPELIGE FAKULTET

Universitetet i Tromsø, N-9037 Tromsø, Telefon 77 64 40 01, Telefaks 77 64 47 65

Oppgave 1

Du får oppgitt funksjonen $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$ med et definisjonsområde for f : $D = \{(x,y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$.

a) Begrunn at følgende integral eksisterer $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$.

b) Formuler integralet som et integral over et elementært område i xy-planet: $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = 4\iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy$. Her får du oppgitt at D_1 er den delen av D som ligger i første kvadrant i xy-planet. Transformer deretter ved variabelskifte integralet til polarkoordinater og løs det.

c) Finn volumet innenfor følgende område $W = \{(x,y,z) \mid 1 \leq x^2+y^2+cz^2 \leq 2$ for $c > 0\}$ ved å formulere og løse et trippelintegral.

Oppgave 2

a) Du får oppgitt vektorfeltet $\mathbf{F}(x,y,z))=(-2x, 5y, 3/z)$. Finn $curl(\mathbf{F})$ og $div(\mathbf{F})$ der de eksisterer.

b) Avgjør om det finnes potensialfunksjoner f for vektorfeltet $\mathbf{F}$. Finn i så tilfelle potensialfunksjoner for hver enkeltsammenhengende del

c) For hvilke områder R med kurver $C \subset R$ er $\int\limits_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds}$ veiuavhengig. Beregn linjeintegralet $\int\limits_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds}$ der C er kurven parameterisert ved

$$\begin{aligned} x(t) &= 2 \\ y(t) &= \cos(t) \\ z(t) &= 2 + \sin(t), \\ t &\in [0, 2\pi], \end{aligned}$$

d) Finn $\int\limits_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{dS}$ der S er den plane flaten begrenset av kurven C i oppgave c). Beregn også $\int\limits_V div\mathbf{F}dxdydz$ der $V = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + (z-2)^2 \leq 1\}$.

Oppgave 3 (De som var oppmeldt også høsten 2003 i kalkulus 3 kan alternativt gjøre oppgave 4. De øvrige skal gjøre oppgave 3, men ikke oppgave 4!!!!!)

Vi skal tenke oss at vi har fått oppgitt et sett med målte (x,y) verdier til en linje som kan inneholde målefeil :

$(x_1 = 1, y_1 = 2), (x_2 = 2, y_2 = 5), (x_3 = 3, y_3 = 4)$. Vi skal tilpasse disse til en linje $y = ax^2 + bx$ ved å skrive ligninger for de ukjente koeffisientene

$(a, b) : y_i = ax_i^2 + bx_i$ for hvert datapunkt.

a)Verifiser at dette ligningsettet kan skrives $A\mathbf{a} = \mathbf{c}$ eller

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \\ 9 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Er dette ligningsystemet konsistent?

b)Finn et konsistent ligningsystem som tilsvarer en minste kvadrat tilnærming til ovenstående ligninger og løs disse.

c) Vis at løsningen tilsvarer en ortogonal projeksjon av $\mathbf{c}$ på kolonnerommet til A og finn denne projeksjonen

Oppgave 4 (Kan bare tas som alternativ for oppgave 3 hvis du var oppmeldt i Mat-1003 høsten 2003!!!)

a) Finn alle de kritiske punktene til $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x$.

b) Avgjør hvilke av disse kritiske punktene som gir lokal minima, lokale maksima eller sadelpunkter. Vi utvider nå funksjonen til å ha en parameter

$c \in \mathbb{R} : h(x, y) = x^2 + y^2 - cxy + x$. For hvilke c -verdier har funksjonen h ingen lokale ekstremalpunkt.

c) Finn retningsderiverte til $f(x, y)$ i punktet $(1, 1)$ i retningen $\mathbf{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1, 1)$.

d) Finn også maksimum og minimum til funksjonen $d(x, y) = x^2 + y^2 - 3xy + x$ gitt føringen

$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$.