EKSAMENSOPPGAVE I MAT-1001

Eksamen i	**: MAT-1001**
Eksamensdato	**: 11. desember 2007**
Tid	**: 0900-1300**
Sted	**: Åsgårdveien 9**
Tillatte hjelpemidler	**: - 2 A4 ark skrevet på begge sider**
	- Rottmanns tabeller
	- Godkjent kalkulator

Oppgavesettet er på 3 sider inkl. forside

Kontaktperson under eksamen: **Professor Einar Mjølhus,**
Tlf 44013

I dette eksamenssettet vil hvert delspørsmål a), b), …, telle likt. Alle svar må begrunnes, og regningene som fører fram til svaret må vises.

Oppgave 1.

a) Finn den generelle løsningen til differensligningen

(1) $x_{n+2} + x_{n+1} + x_n = 0$

Løsningen skal uttrykkes på reell form.

b) Finn den løsningen av (1) som oppfyller

(2) $$\begin{aligned} x_0 &= 1 \\ x_1 &= 1. \end{aligned}$$

c) Vis at løsningen av problemet gitt ved (1) og (2) bare består av hele tall.

Oppgave 2.

a) Vis at funksjonen f gitt ved

$$f(x) = e^x - x - 1, \ x \in \mathbf{R}$$

har et globalt minimum; finn dette minimumspunktet og minimumsverdien.

b) La

$$g(x) = \frac{x}{e^x - 1}, \ x \neq 0.$$

Finn en verdi a slik at ved å sette

$$g(0) = a$$

blir g kontinuerlig.

c) Finn eventuelle asymptoter for g. Lag en skisse av grafen til g ut fra det du nå vet om g.

Oppgave 3

a) Finn et uttrykk for funksjonen

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{t(t+1)} dt$$

for $x > 0$.

b) La funksjonen G være definert ved

$$G(x) = \int_x^1 \ln t dt, \quad x > 0.$$

Forklar hvorfor G er deriverbar for alle $x > 0$. Vis at G er strengt voksende for $0 < x < 1$ og strengt avtagende for $1 < x$. Finn maksimumsverdien til G og for hvilken verdi av x den antas.
c) Finn et eksplisitt uttrykk for $G(x)$, f. eks. ved delvis integrasjon.

Oppgave 4.

a) La $c = a + ib$ der a og b er reelle tall og $i^2 = -1$. Skriv funksjonen

$$h(x) = e^{cx}$$

som

$$h(x) = f(x) + ig(x),$$

der f og g er reelle funksjoner.
b) Vis derivasjonsregelen

(1) $$h'(x) = ce^{cx}$$

ut fra de derivasjonsregler du kjenner for reelle funksjoner, og der h' er definert som $h' = f' + ig'$.
c) Beregn

$$\int_0^x e^{at} \cos bt dt$$

enten ved hjelp av derivasjonsregelen (1) eller på annen måte.

Lykke til.